EPFL

Cours Electrotechnique I :

2. Conventions et symboles :

→ concepts

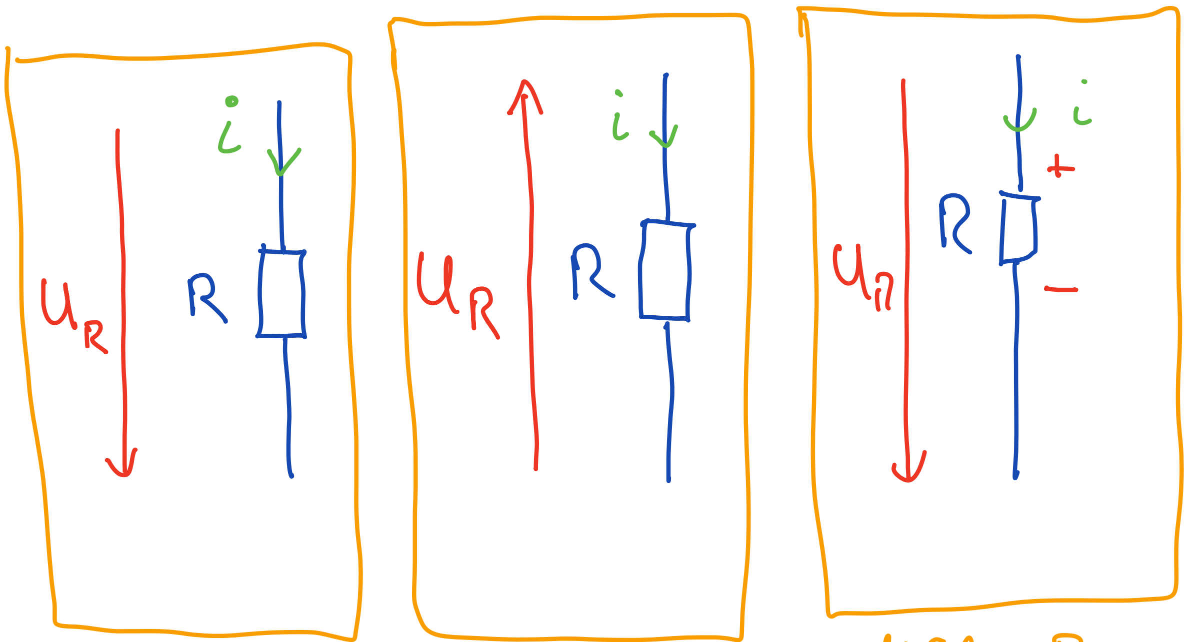
Ex : Courant : i, I, $\hat{I}$, $\hat{i}$, $\bar{I}$, $\underline{I}$

unité : [A]

Relations : $U = R \cdot I$

$u = R \cdot i$

Choix : Convention Récepteur



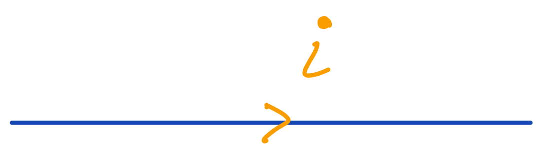
International France USA, B

$P_R = R \cdot I^2 = UI$ = positive

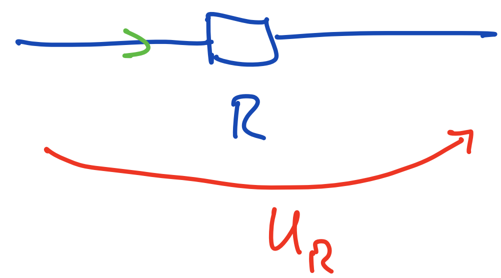
2.2 Représentation graphique :

Conducteur parfait :

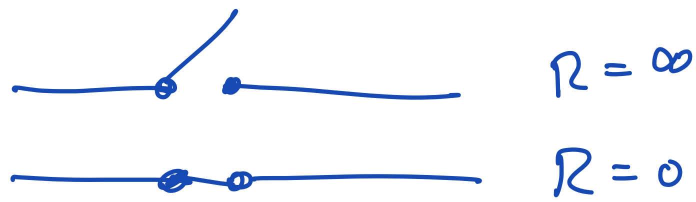
conducteur avec un courant :



Elément :



Interrupteur :

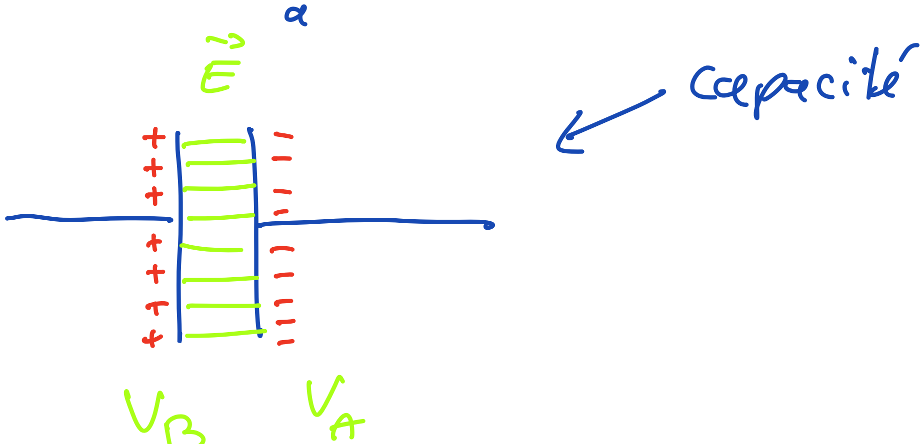


3. Lois fondamentales :

Champ électrique :

Différence de potentiel électriques

$$V_A - V_B = \int_a^b E \, dl = U_{ab}$$



3.2.19 La Capacité :

Définition : Charge électrique : Q

capacité : $C = \dfrac{Q}{U_{ab}}$ $[F]$ (Farad)

Symbole :

3.3 Courant électrique :

$$i = \frac{dQ}{dt} \qquad [A]$$

j = Densité de courant $[A/m^2]$

3.34 Pertes Joule

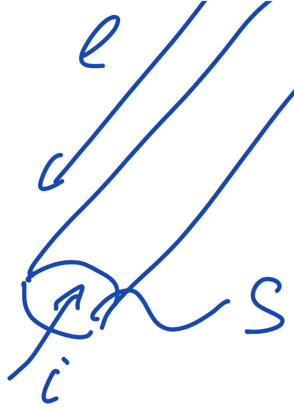
$$P = R \cdot I^2 \qquad [W]$$

$$P = \rho \int_V j \, dV_{cu}$$

3.3.6 Résistance :

b

$$R_{ab} = \int_a \rho \frac{dl}{S}$$



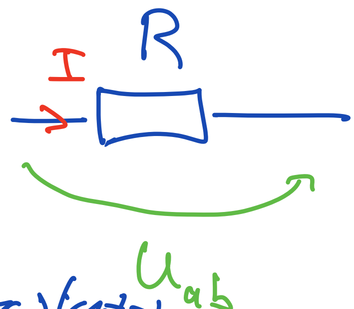
Résistivité [Ω m]

Si on a un milieu homogène et S est cste :

$$R = \frac{\rho \cdot l}{S} \quad [\Omega]$$

3.3.8 Loi d'Ohm :

$$U_{ab} = R_{ab} \cdot I$$



(Tension et le courant sont constants)

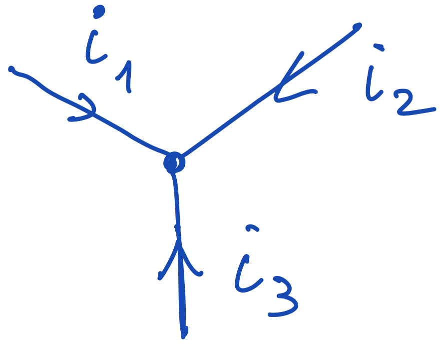
$$u_{ab} = R_{ab} \cdot i$$

(Tension et le courant sont variables)

3.3.11 Lois de Kirchhoff :

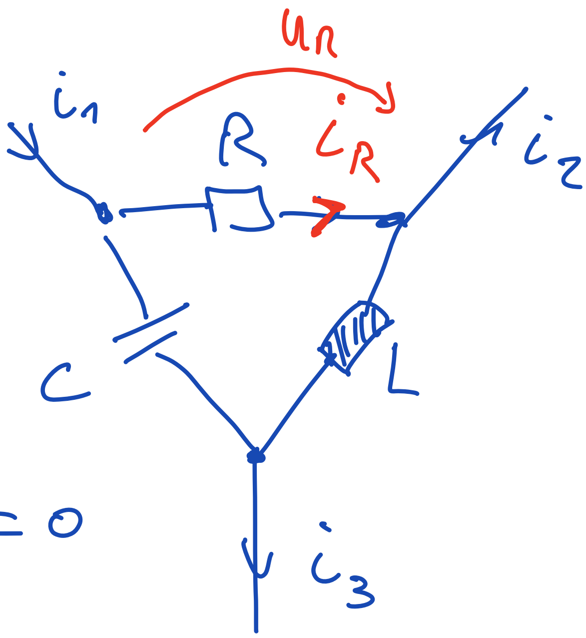
Noeud : Pt de convergence d'au moins 3 conducteurs

$$\sum i_j = 0$$



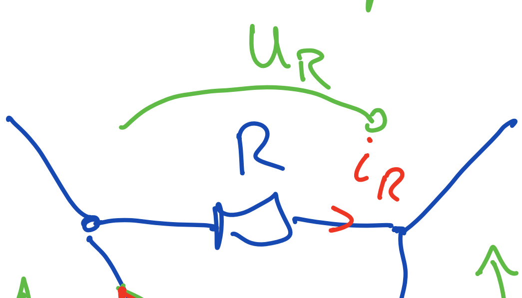
$$i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

Noeud généralisé :

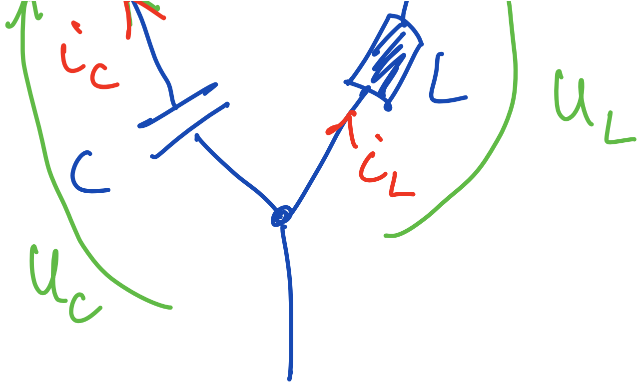


$$i_1 - i_2 - i_3 = 0$$

Maille : Ensemble de branche partant d'un noeud pour y revenir



$$\sum_j U_j = 0$$



$$U_R - U_L + U_C = 0$$

3.4 Inductance :

$$u = L \frac{di}{dt}$$

/ $\vec{Rot}\,\vec{H} = \vec{J}$

$\vec{Rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Crée une tension en fonction de la variation du courant

3.5 La Capacité

$$C = \frac{Q}{U_{ab}}$$

$$Q = \int i \, dt$$

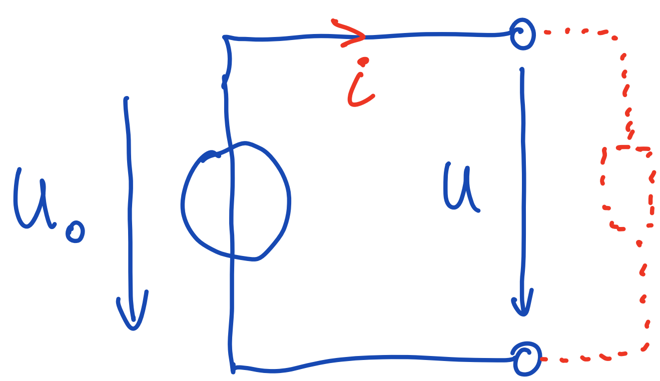
$$u_{ab} = \frac{1}{C} \int i \, dt$$

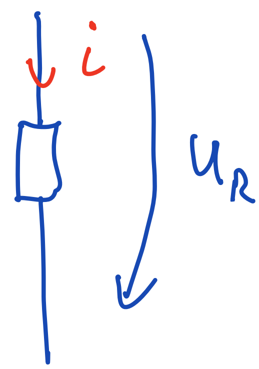
4. Eléments de circuit :

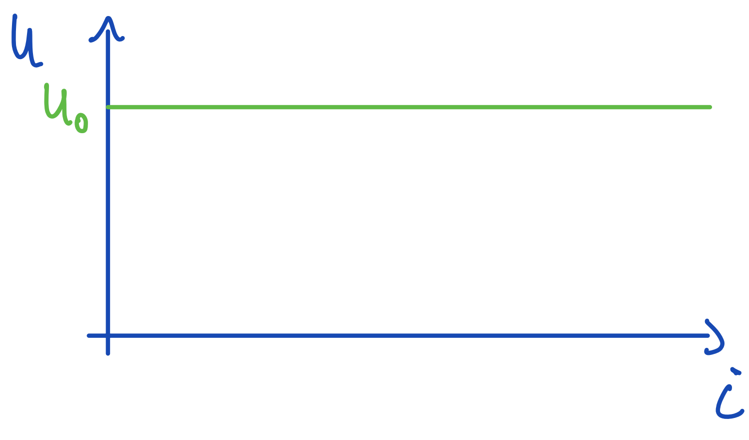
4.1 Définition : Dipôle : circuit qui possède 2 bornes

4.2 Sources de tension et courant :

a) Source de tension idéale :

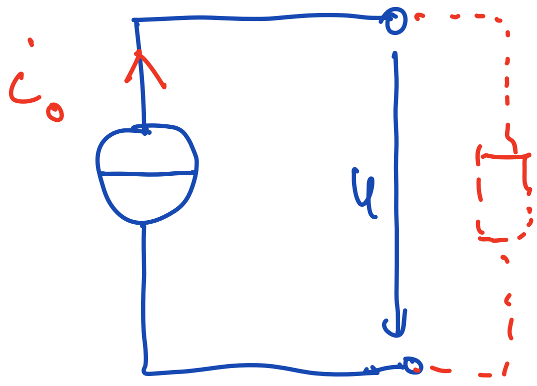




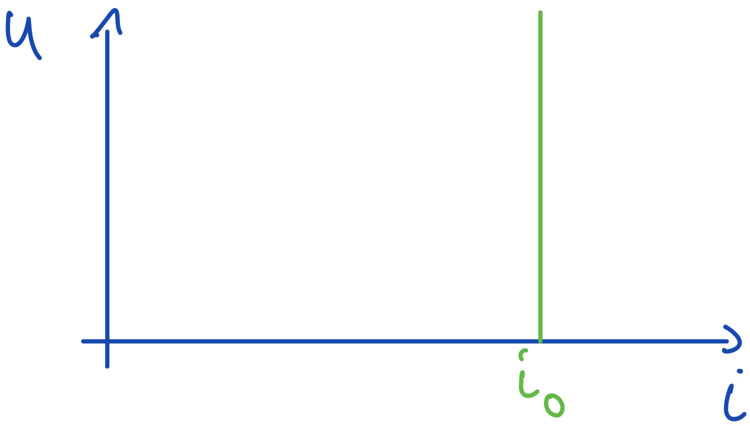


c'est un élément virtuel et inexistant dans la nature

b) Source de courant idéale :

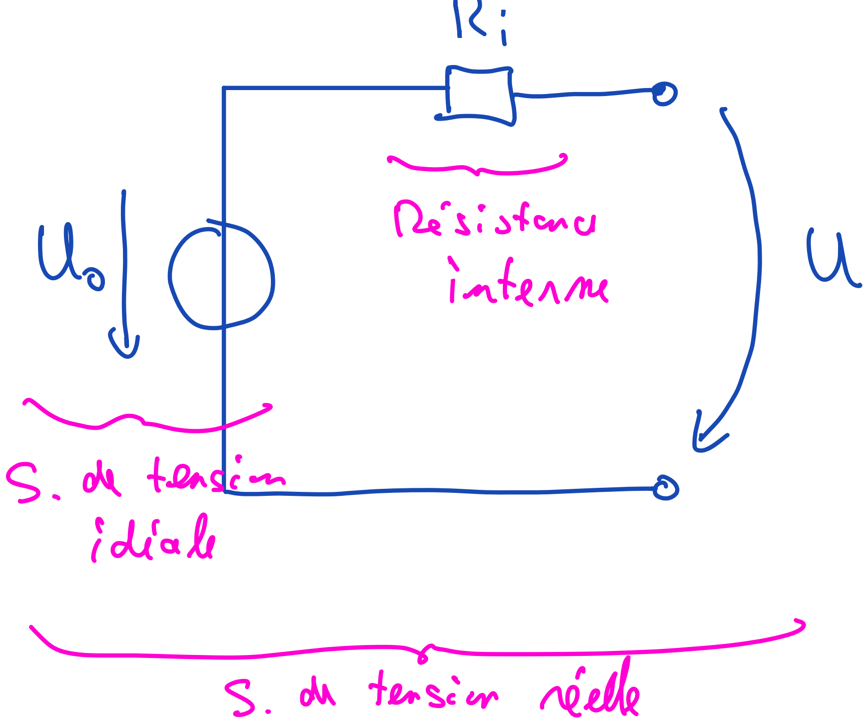


élément idéal inexistant dans la nature



4.2.5 Source de tension réelle :

Définition :



U_0 : Tension à vide (pas de charge connecté)

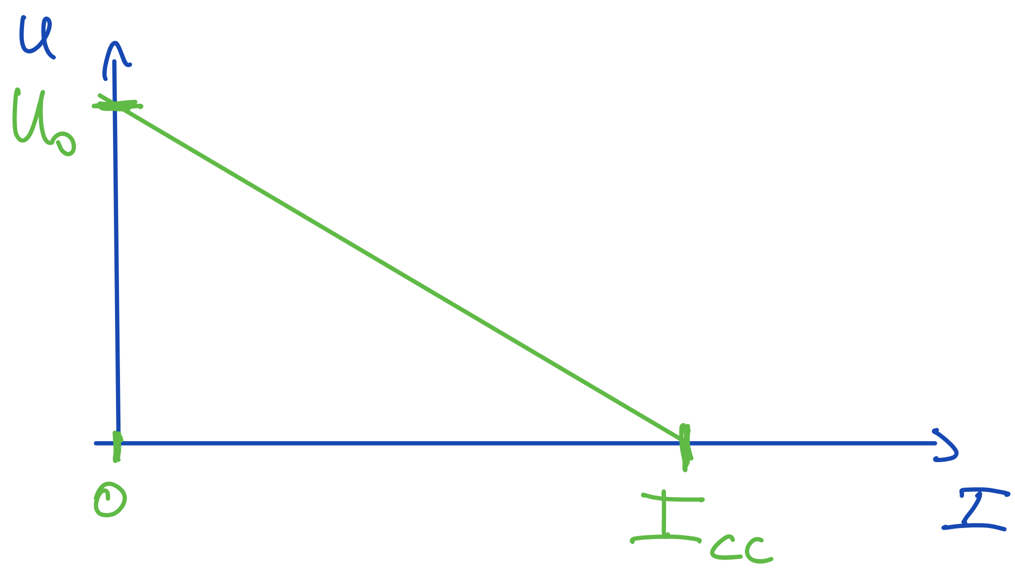
R_i : Résistance interne

U : Tension de la source réelle

$$\sum U = 0$$

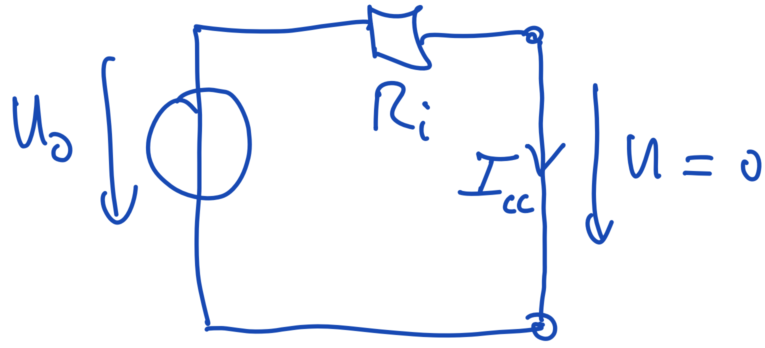
$$\rightarrow \quad -U_0 + R_i \cdot I + U = 0$$

$$\underline{\underline{U = U_0 - R_i I}}$$



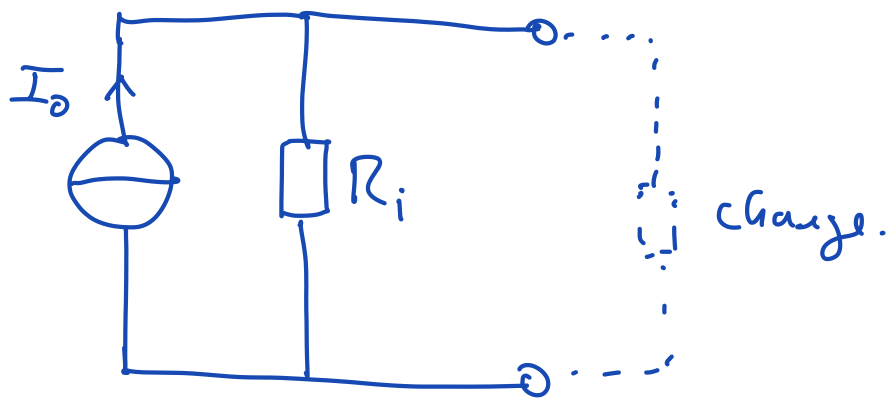
I_{cc} = courant - court circuit

Si on est en court - circuit :

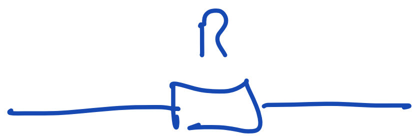


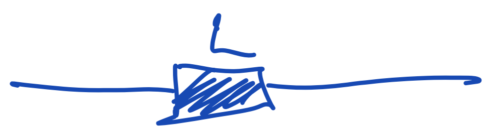
$$I_{cc} = \frac{U_0}{R_i}$$

4.2.6 Source de courant réelle :



4.3 Eléments de base :

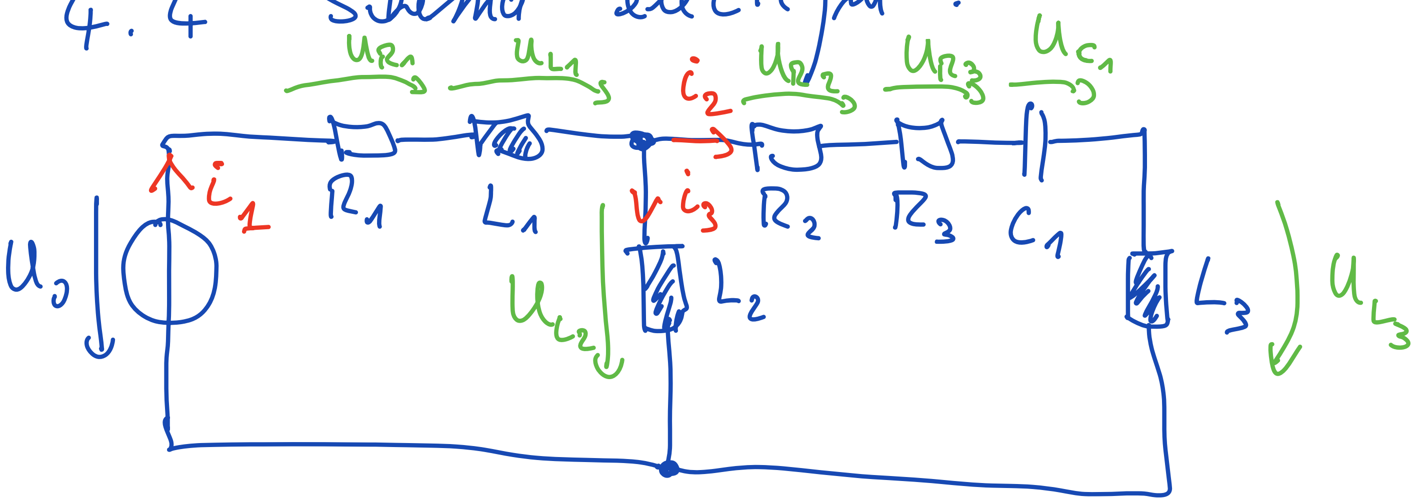
Résistance : 

Inductance : 

capacité : 

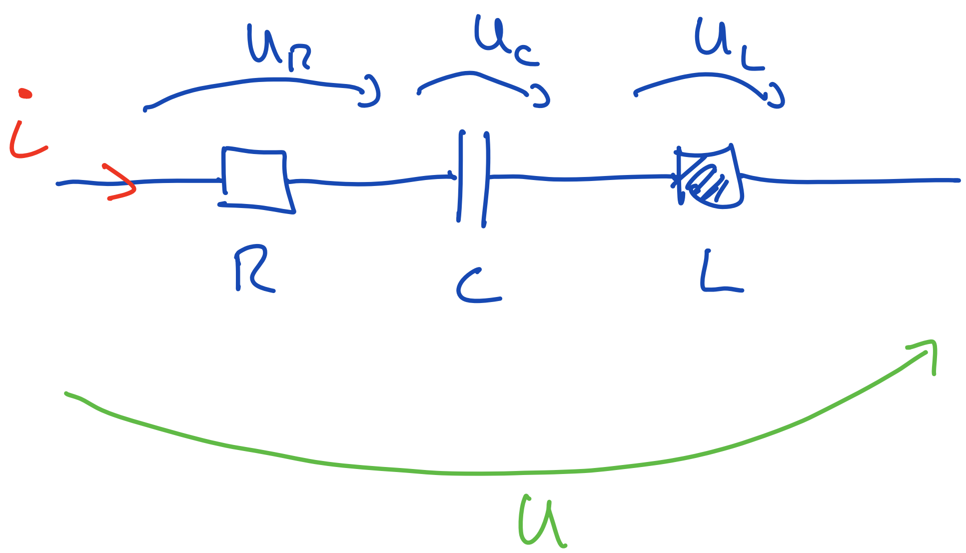
Rappel : $U_L = L \frac{di}{dt}$ en continue $U_L = 0$

4.4 Schéma électrique :



5. Combinaison simple d'éléments linéaires

5.2 Mise en série :

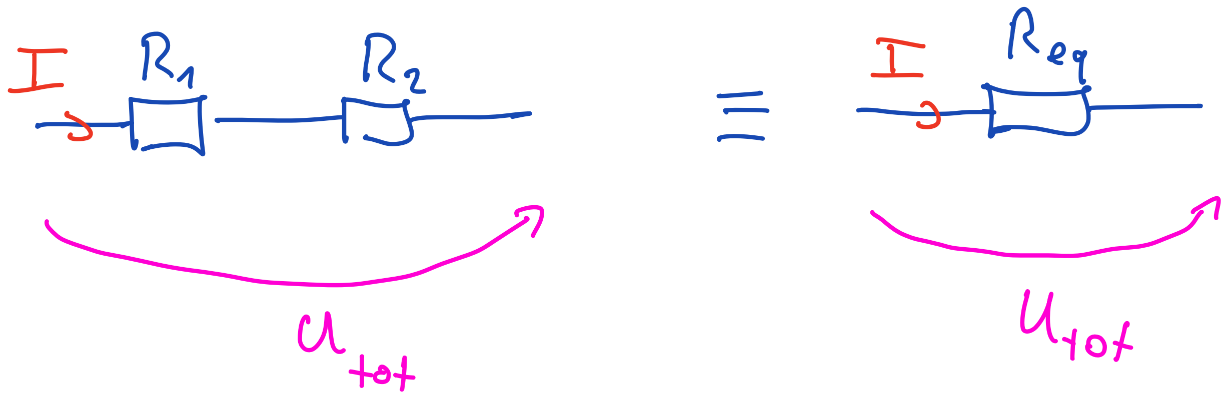


Série : parcourus par le même courant

$$i_R = i_C = i_L$$

$$u = u_R + u_C + u_L$$

5.2.2 Mise en série de R :



$$U_{tot} = U_{R_1} + U_{R_2}$$

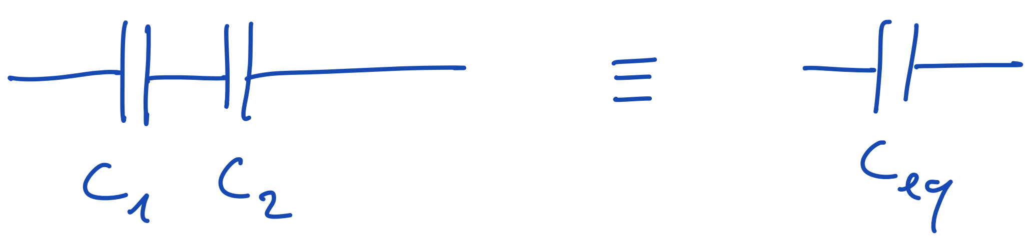
$$U_{tot} = U_{R_{eq}}$$

$$= R_1 \cdot I + R_2 \cdot I$$

$$U_{tot} = \underbrace{(R_1 + R_2)}_{R_{eq}} \cdot I$$

Série $\qquad R_{eq} = \sum_{k=1}^{n} R_k \qquad$ (n = nb de R en série)

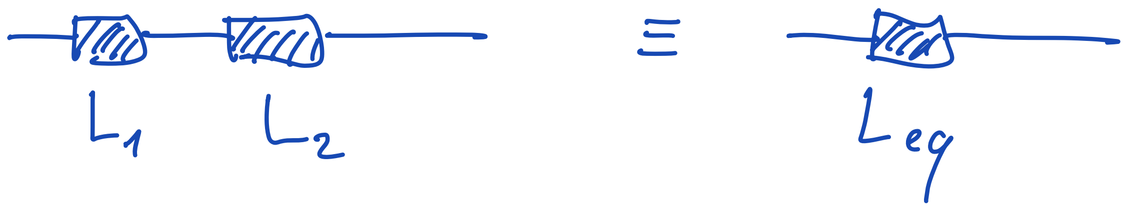
5.2.3 Mise en série des C



Série $\qquad C_{eq} = \frac{1}{\sum^{n} 1 \ldots} \qquad$ (n = nb de C)

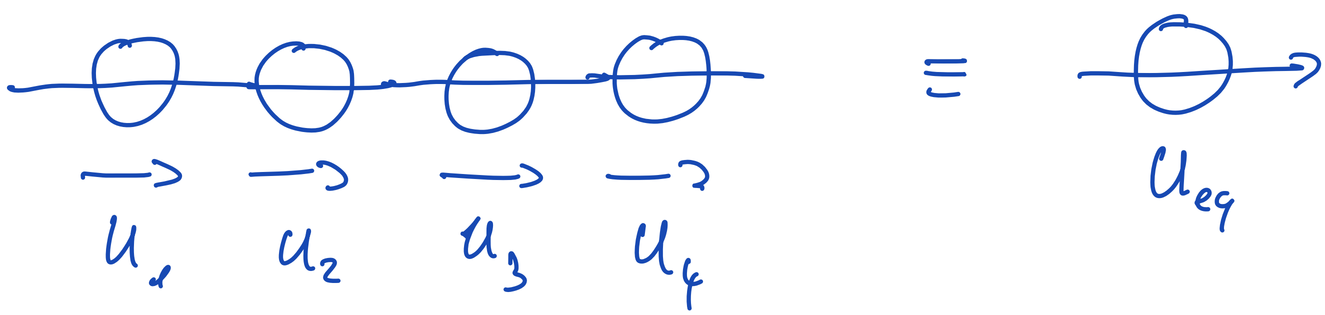
$k=1 \quad C_k$

5.2.6 Mise en série des L

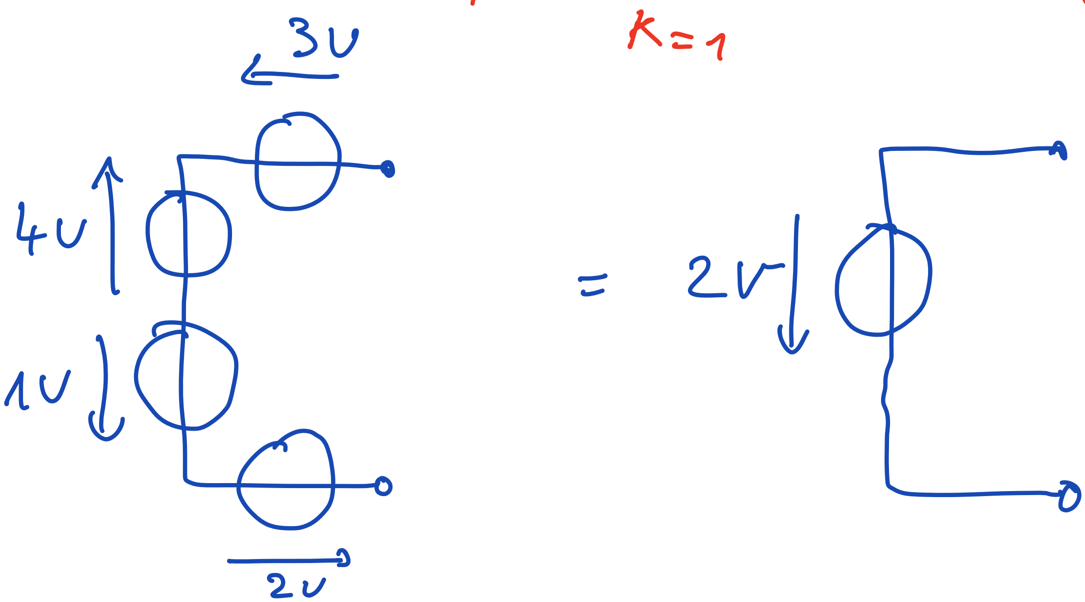


Série : $L_{eq} = \sum_{k=1}^{m} L_k$ (m = nb de L)

5.2.7 Mise en série des source de tension :



Série $U_{eq} = \sum_{k=1}^{m} U_k$ (m sources)

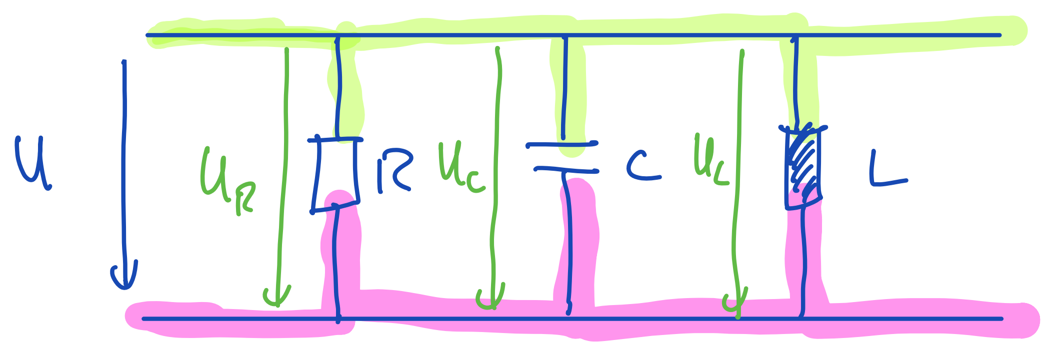


5.2.9 Mise en série des sources de courant

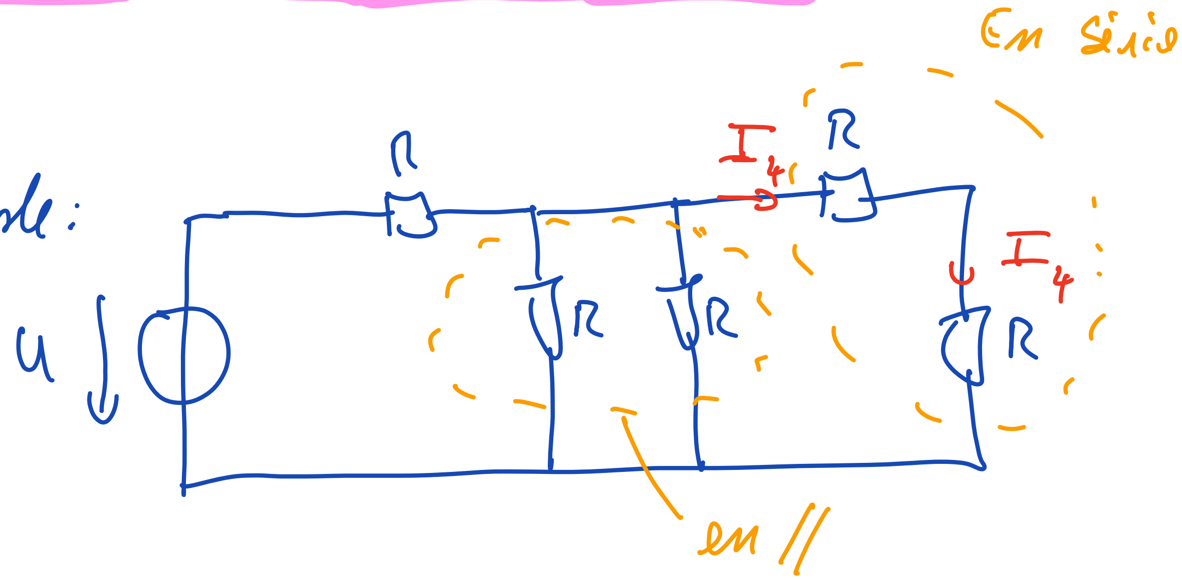
$\Rightarrow$ Impossible sauf si toutes les sources ont la même valeur !

5.3 Mise en parallèle :

Définition : Toutes les bornes des éléments sont au même potentiel



Exemple :



5.3.2 Mise en // des R :

$$R_{eq} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}} \qquad n = \text{nb de } R$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

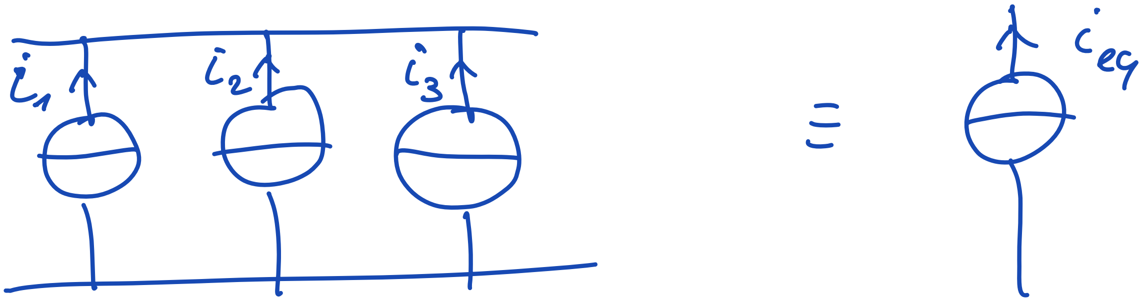
5.3.5 Mise en // des C :

$$C_{eq} = \sum_{k=1}^{n} C_k \qquad n = \text{nb de } C$$

5.3.6 Mise en // des L :

$$L_{eq} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{L_k}} \qquad n = \text{nb de } L$$

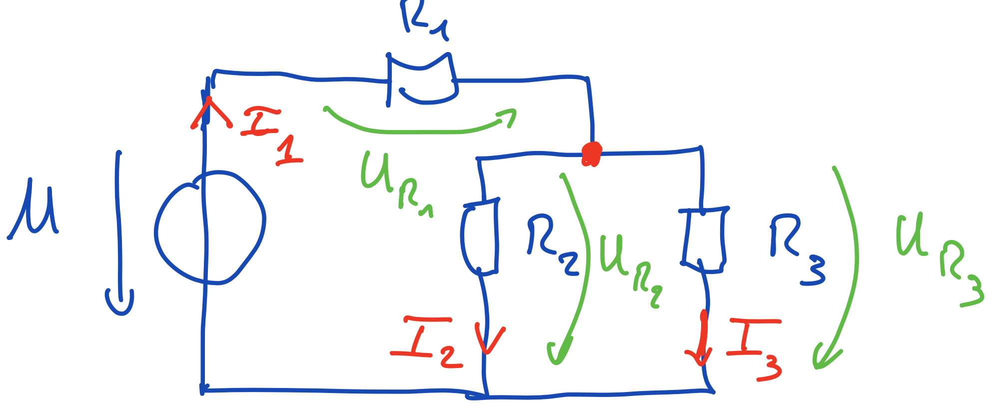
5.3.7 Mise en // des sources de courant.



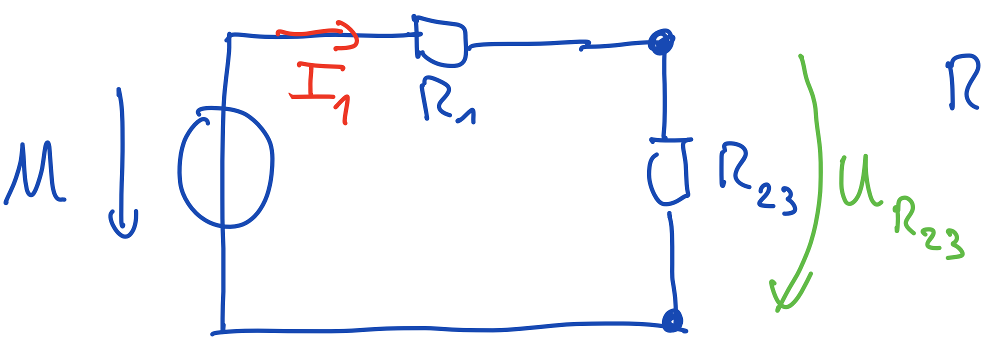
$$i_{tot} = i_{eq} = \sum_{K=1}^{m} i_K$$

Mise en // des sources de tensions est impossible ! Sauf si toutes les tensions ont même valeur !

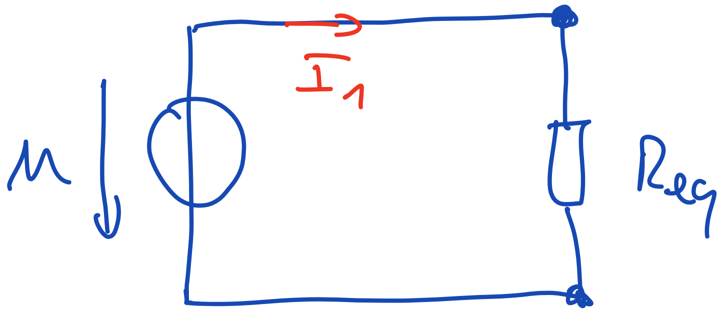
5.4 Circuits combinés :



$I_1 = I_2 + I_3$



$$R_{23} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}$$



$$R_{eq} = R_1 + R_{23}$$

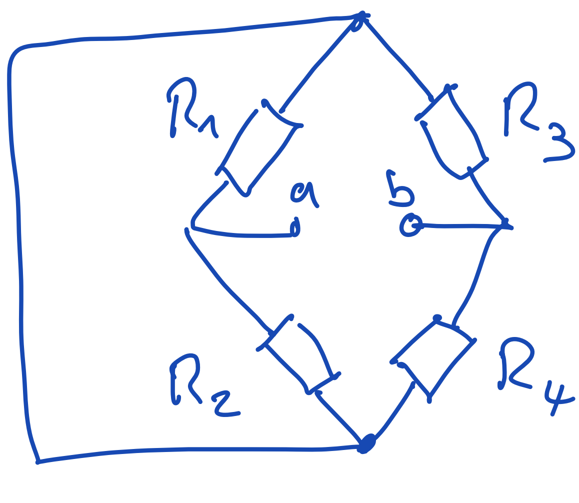
$$U = R_{eq} \cdot I_1 \quad \rightarrow \quad I_1 = \frac{U}{R_{eq}}$$

$$U_{R_1} = U_{R_3} = U_{R_{23}}$$

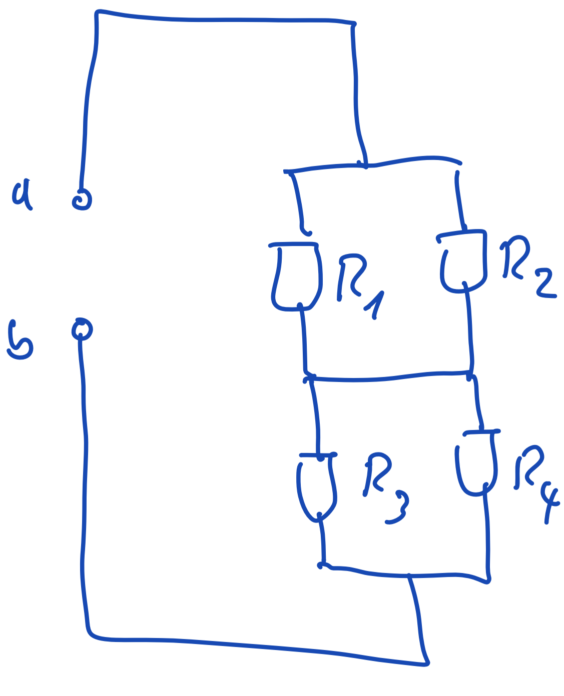
$$U_{R_{23}} = R_{23} \cdot I_1 = U_{R_2}$$

$$I_2 = \frac{U_{R_2}}{R_2}$$

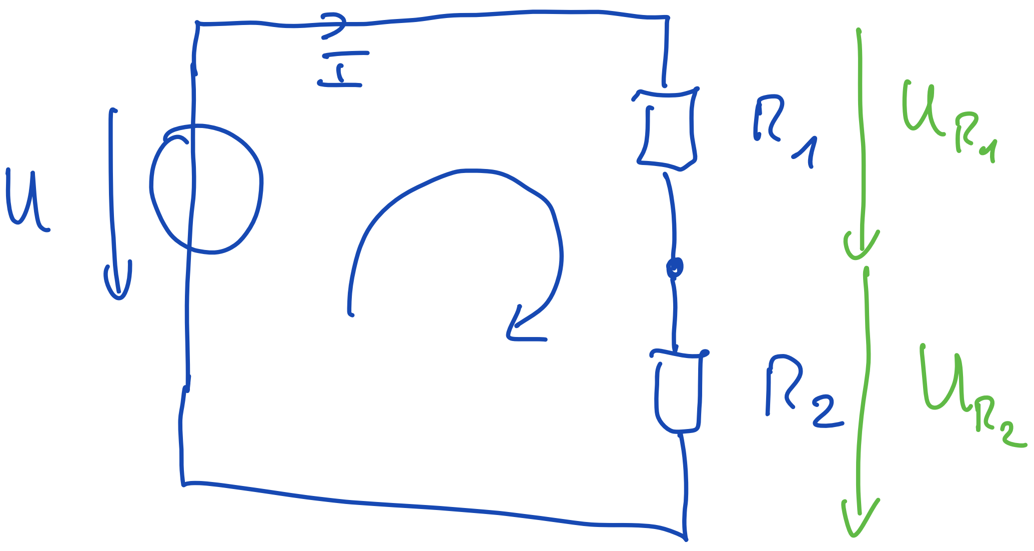
5.4.3 Exemple :



$\equiv$



5.5.1 Diviseur de tension :



$$-U + U_{R_1} + U_{R_2} = 0$$

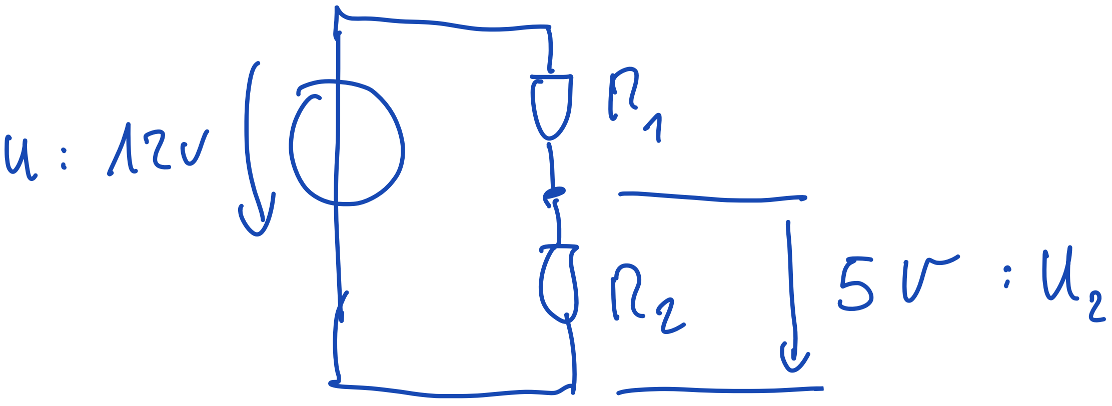
$$U = U_{R_1} + U_{R_2}$$

$$U = R_1 \cdot I + R_2 \cdot I = (R_1 + R_2) I$$

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2}$$

$$U_{R_2} = R_2 \cdot I = U \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$U_{R_1} = R_1 \cdot I = U \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

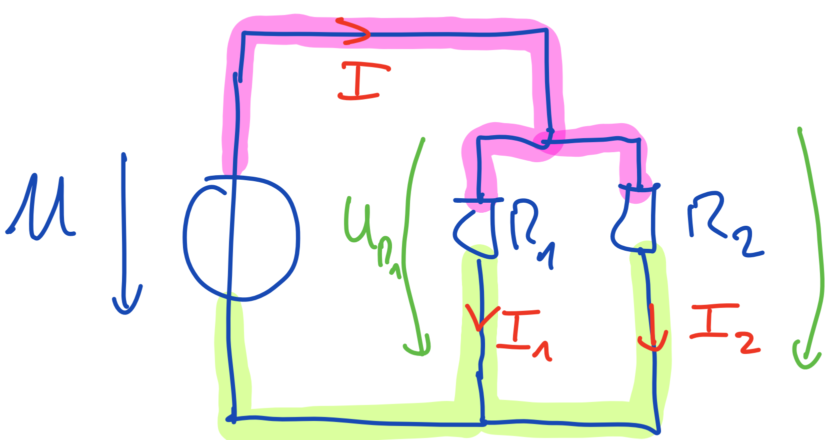


$$U_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot U$$

$$5 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot 12 \Rightarrow 5 R_1 = 7 R_2$$

$$R_1 = 100\ k\Omega$$
$$R_2 = 71{,}5\ k\Omega$$

5.5.4 Diviseur de courant:



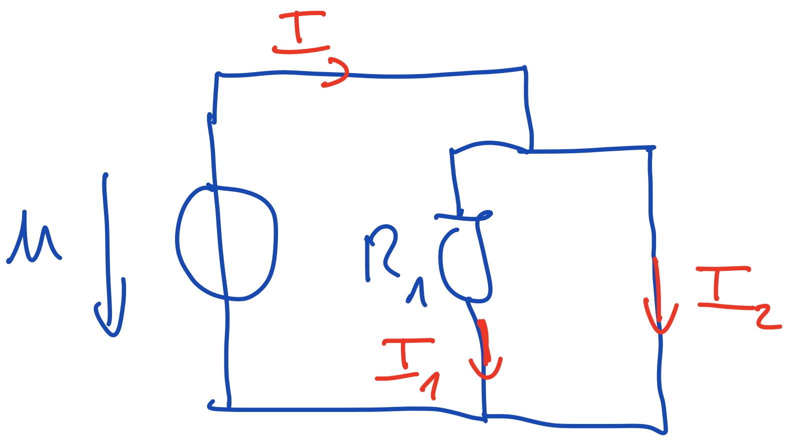
$U_{R_2} = U_{R_1} = U$

$$I = \frac{U}{R_{eq}} \qquad R_{eq} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

$$u = u_2 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot I = R_2 \cdot I_2$$

$$\boxed{\begin{aligned} I_2 &= \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot I \\ I_1 &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot I \end{aligned}}$$

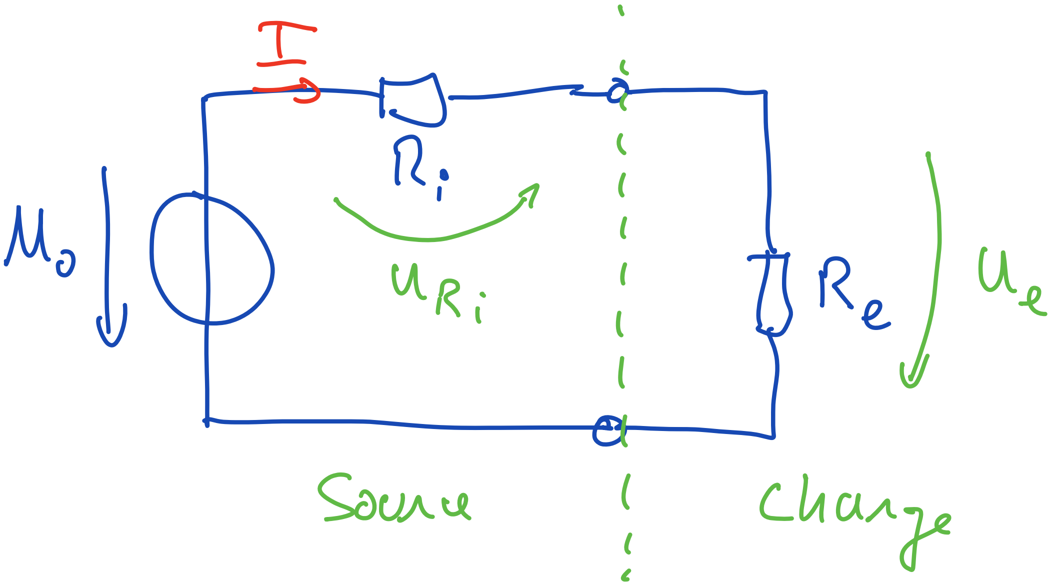
Si



5.6 Méthodes de Résolution :

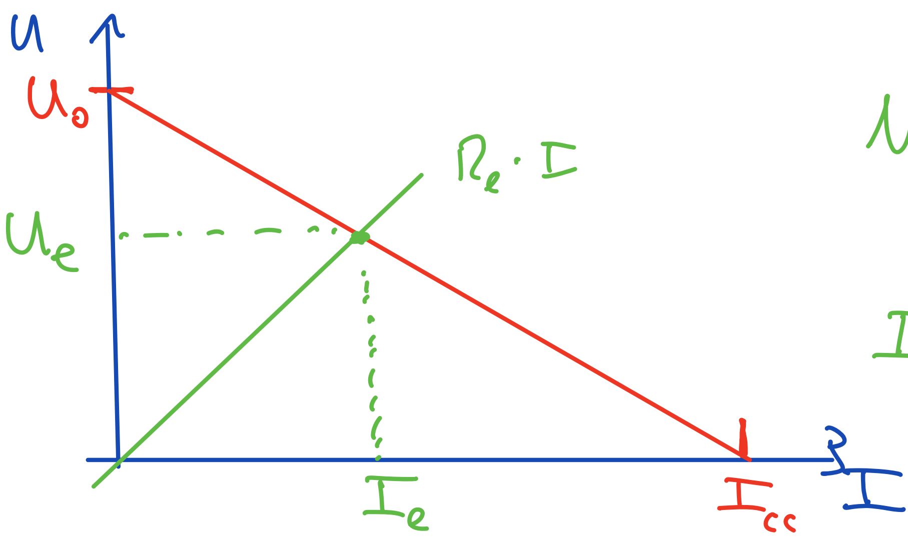
- Redessiner le schéma
- Définir toutes les grandeurs (u, I, i)
- " les sens
- Réduire le schéma
- Analyse

5.6.2 Source de tension réelle :



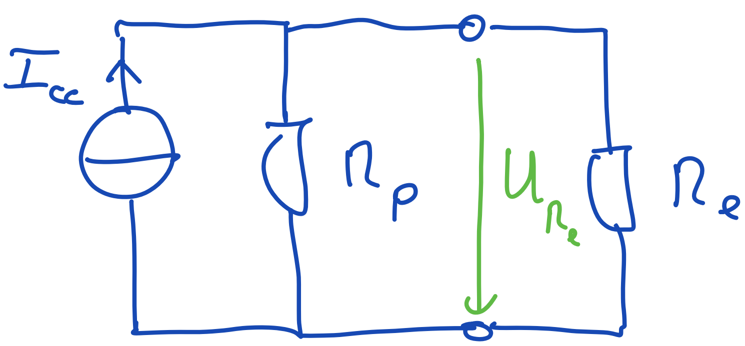
$$U_e = U_0 - U_{R_i} = U_0 - R_i \cdot I$$

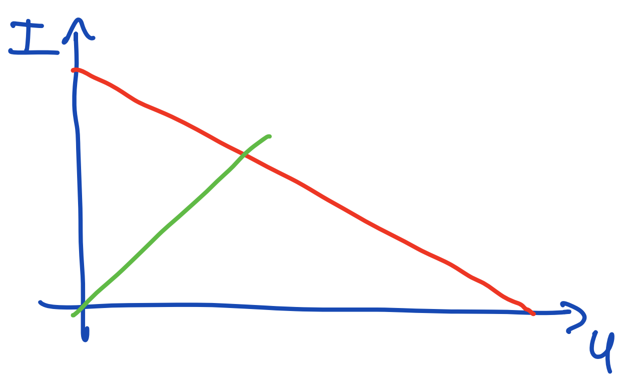
$$U_e = \qquad = R_e \cdot I$$



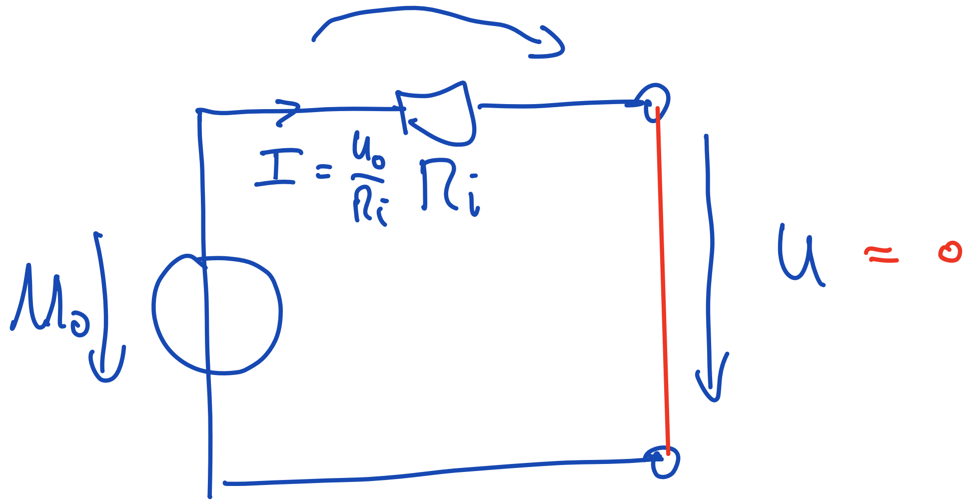
$$U_e = U_0 \cdot \frac{R_e}{R_e + R_i}$$

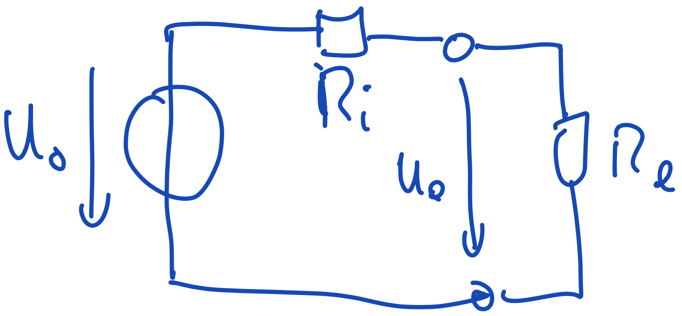
$$I_e = \frac{U_0}{R_i + R_e}$$

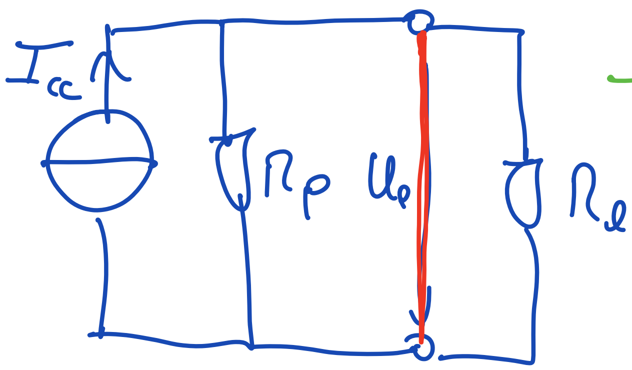




5.6.3 Equivalence des sources de tension et courant







court-circuit	circuit ouvert (pas de R_e)
$R_e = 0$	
$U_{e_{cc}} = 0$	$U_{e_0} = U_0$
$I_{cc} = \frac{U_0}{R_i}$	
$I_{e_{cc}} = I_{cc}$	$U_{e_0} = R_p I_{cc}$
$U_{e_{cc}} = 0$	

On pose $U_{e0} = R_p I_{cc} = U_0$

$$I_{cc} = \frac{U_0}{R_i} = I_{ecc}$$

$$\boxed{R_p = \frac{u_0}{I_{cc}} = \frac{u_0}{u_0/R_i} = R_i}$$

En résumé :

5.7 THÉORÈMES DE THÉVENIN ET DE NORTON
5.8 PRINCIPE DE SUPERPOSITION
5.9 TRANSFORMATION Π-T
5.11 PUISSANCE MAXIMALE ET ADAPTATION
BILAN

Électrotechnique I
Yves PERRIARD & Yoan CIVET
Laboratoire d'Actionneurs Intégrés

5.7 THÉORÈMES DE THÉVENIN ET DE NORTON

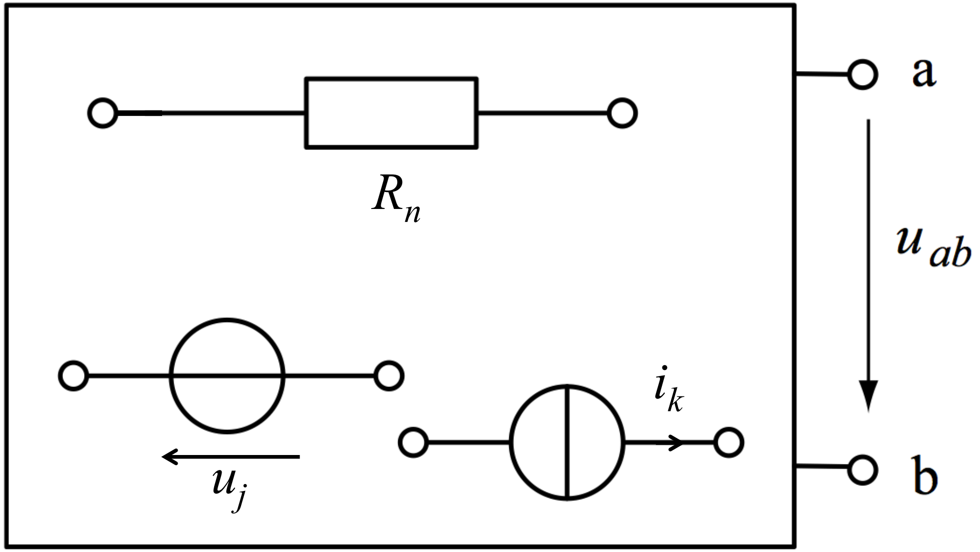
CIRCUITS ÉQUIVALENTS

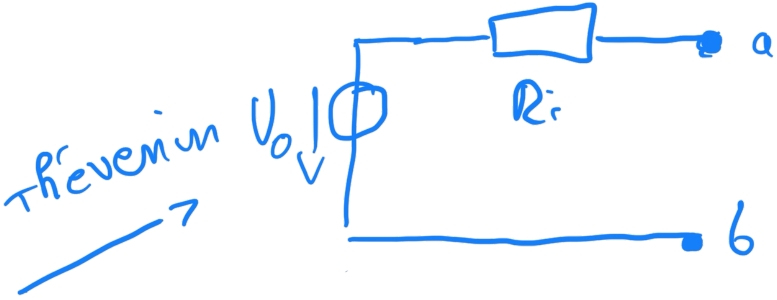
Électrotechnique I
Yves PERRIARD & Yoan CIVET
Laboratoire d'Actionneurs Intégrés

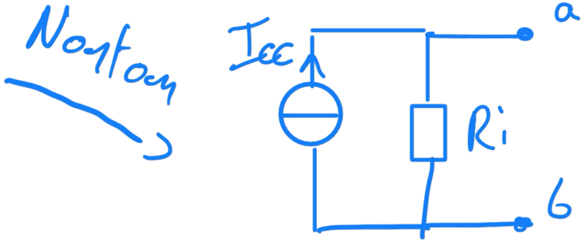
5.7 THÉORÈMES DE THÉVENIN ET DE NORTON

EPFL

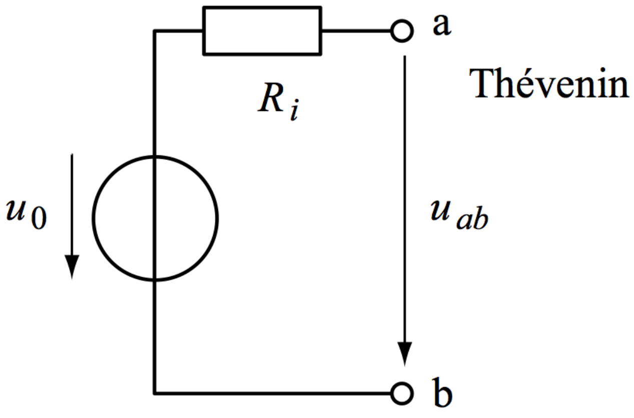
Définitions

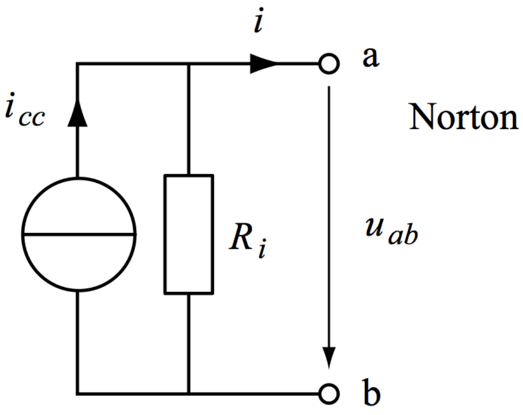






Tension à vide – Courant de court-circuit – Résistance interne





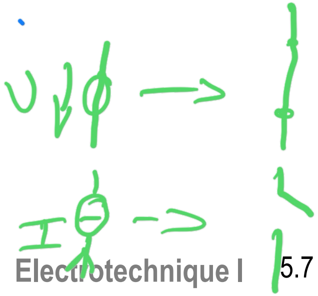
* U_0 = tension à vide

$U_0 = U_{ab} \Big|_{\substack{\text{à vide} \\ I_{ab}=0}}$

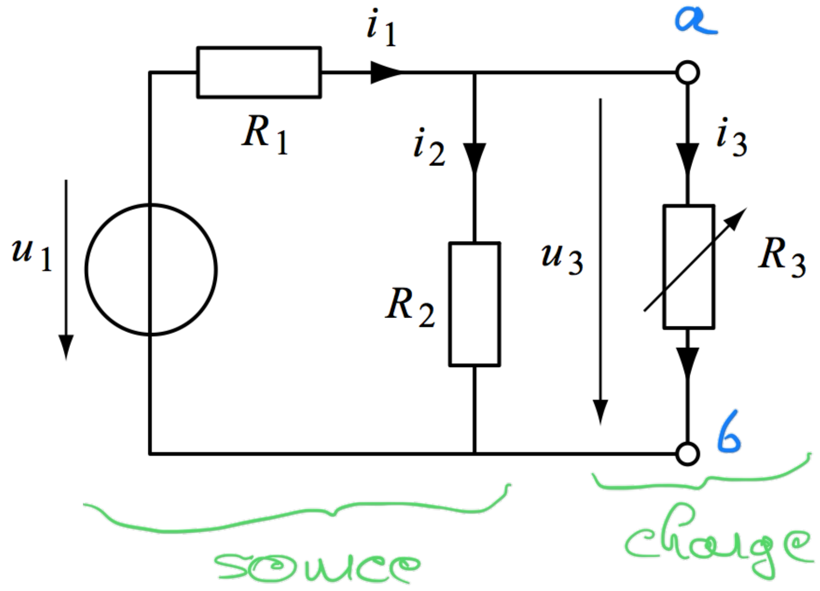
* $I_{cc} = I_{ab} \Big|_{U_{ab}=0}$ en court-circuit.

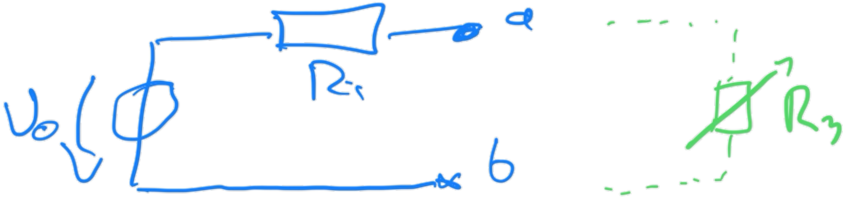
* $R_i = \dfrac{U_0}{I_{cc}} = R_{ab} \Big|_{\substack{U_j=0 \\ i_k=0}}$

Annuler les sources

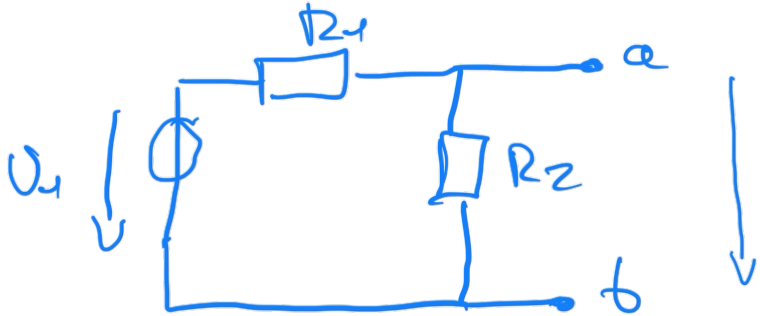


Exemple





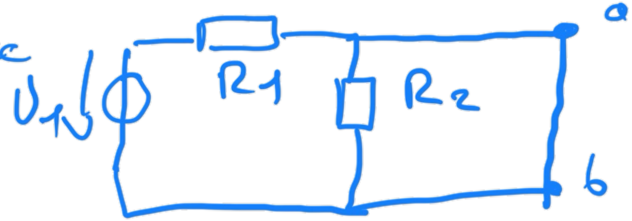
* Tension à vide



$U_{R2} = U_0$

$$U_{R2} = \frac{R_2}{R_2 + R_1} U_1$$

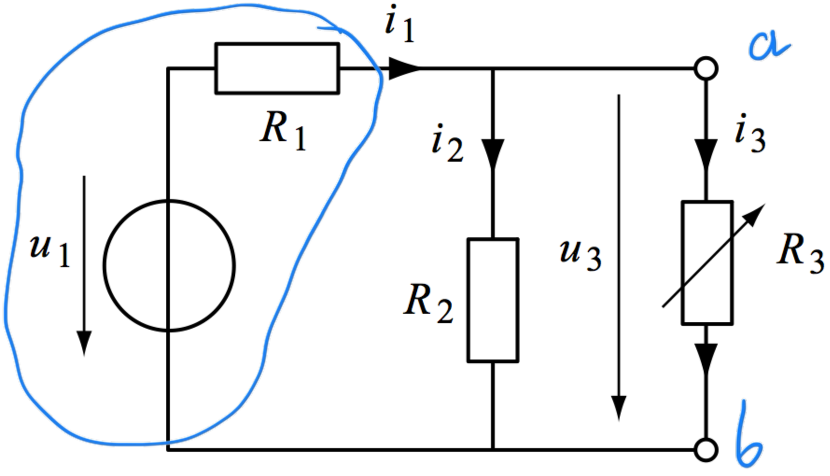
* I_{cc}

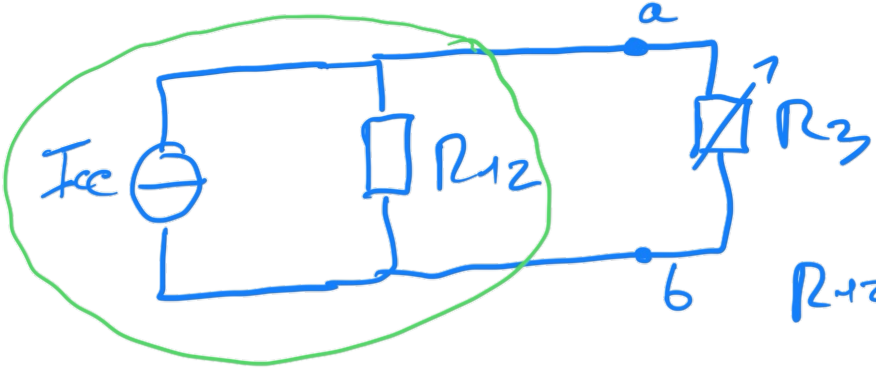


$$I_{cc} = \frac{U_1}{R_1}$$

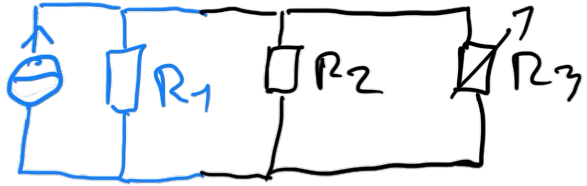
* $$R_i = \frac{U_0}{I_{cc}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Autre possibilité

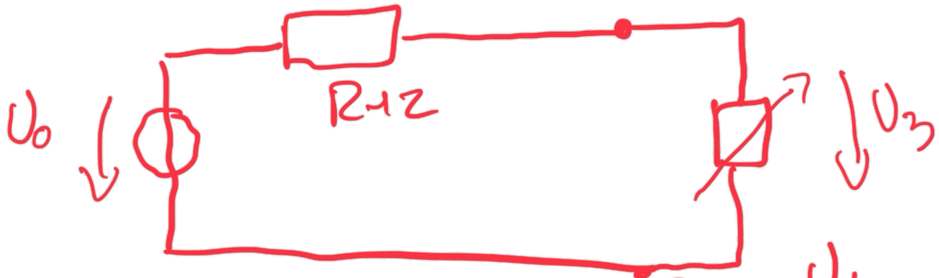




$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

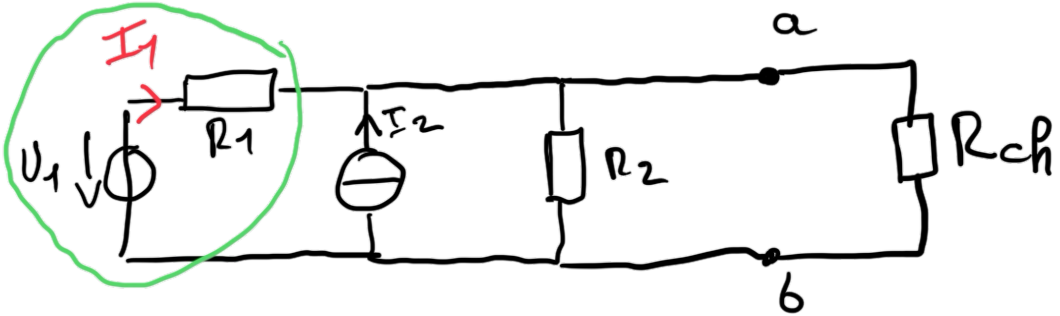


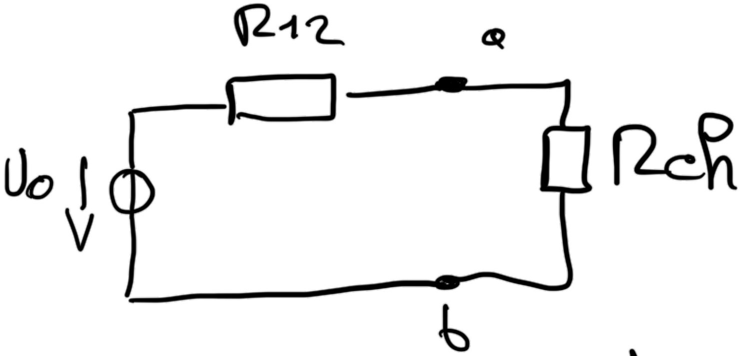
$$I_{cc} = \frac{U_1}{R_1}$$



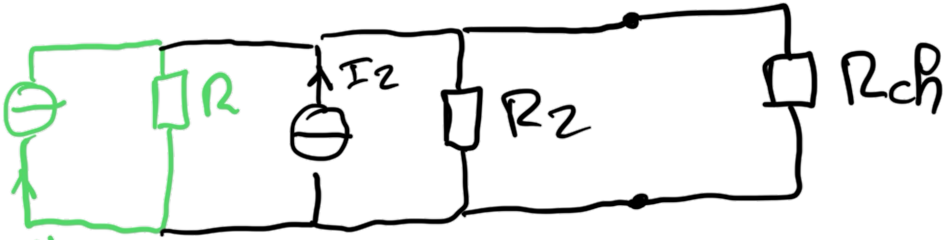
$$U_0 = R_{12} I_{cc} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \frac{U_1}{R_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_1$$

Autre exemple

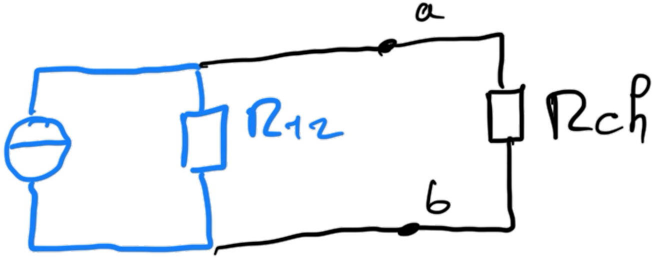




$$U_0 = R_{12}\left(\frac{U_1}{R_1} + I_2\right)$$



$$I_{cc} = \frac{U_1}{R_1}$$



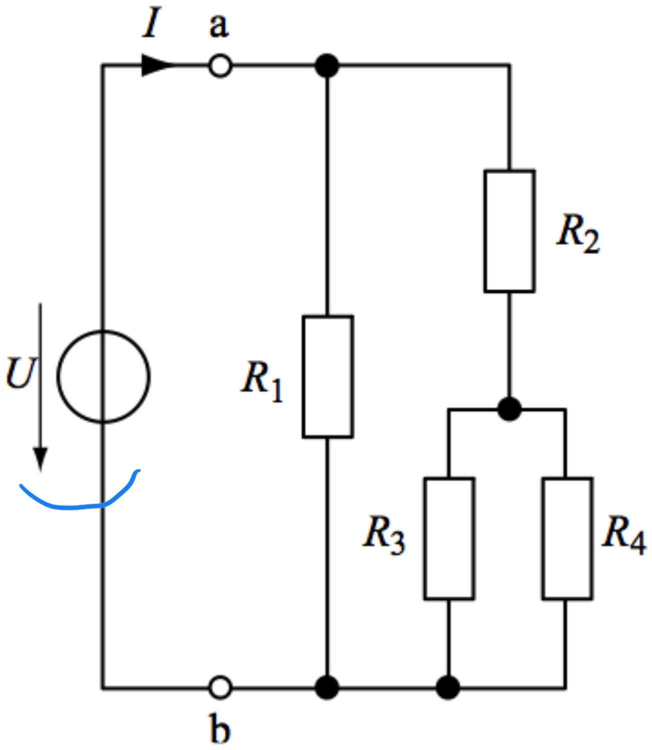
$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \qquad \frac{U_1}{R_1} + I_2$$

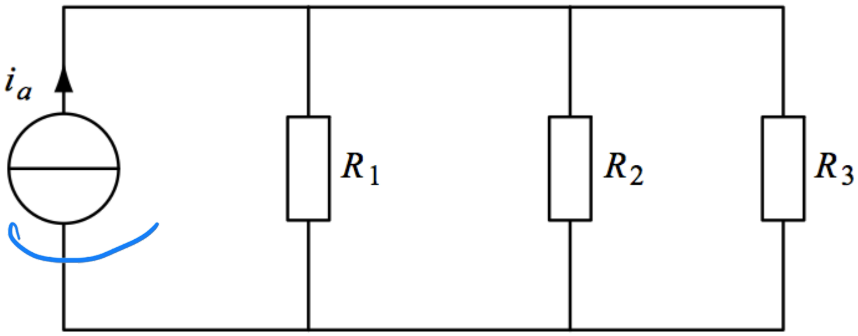
5.8 PRINCIPE DE SUPERPOSITION

Électrotechnique I

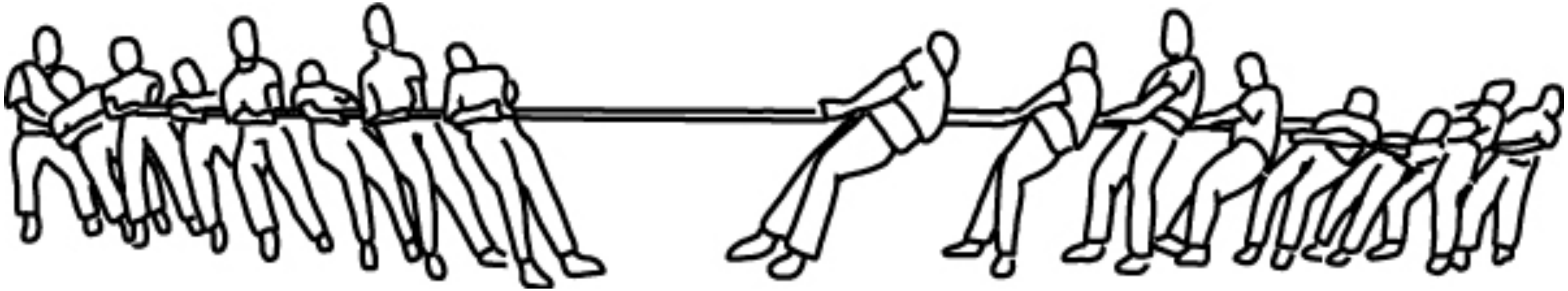
Yves PERRIARD & Yoan CIVET
Laboratoire d’Actionneurs Intégrés

Excitation d'un circuit et réponse du circuit à une excitation

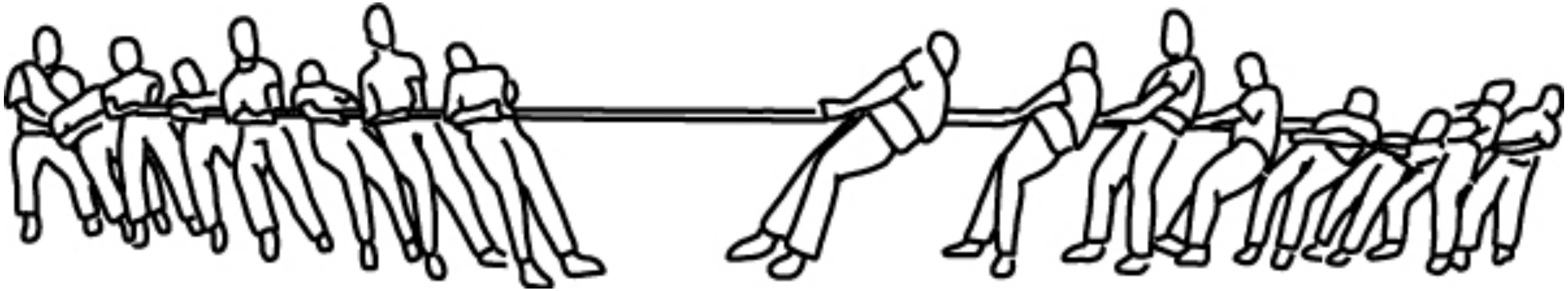




Énoncé



Énoncé

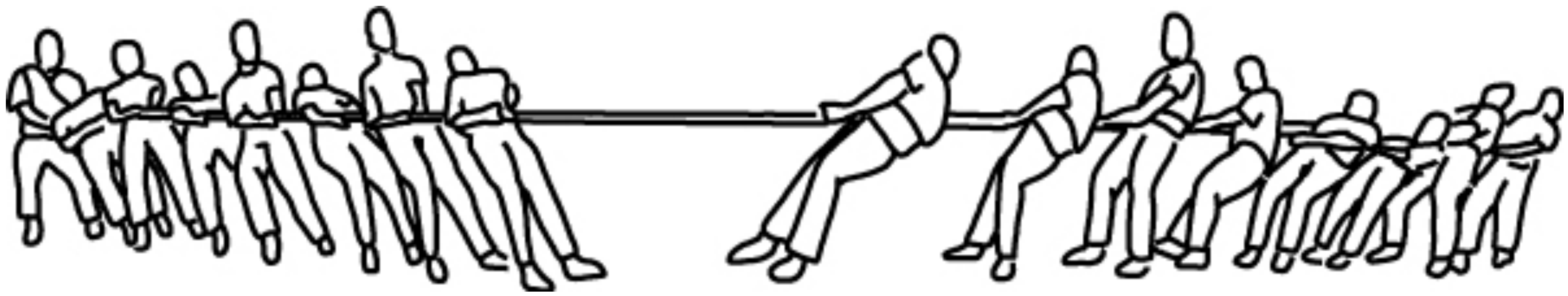


La réponse du système à une somme d'excitations

est égale à

la somme des réponses dues à chaque excitation prise séparément.

Énoncé



La réponse du système à une somme d’excitations
est égale à
la somme des réponses dues à chaque excitation prise séparément.

Le système doit être linéaire !!

EPFL

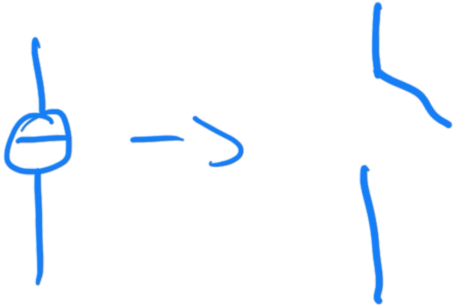
Méthodologie

- Eviter une méthode d'analyse globale souvent lourde
- → Succession de calculs partiels
- A chaque étape, une seule source est prise en compte
- Les autres sont annulées
- Le résultat total est la somme algébrique des résultats partiels

Que signifie « annuler une source » ?

* Source de tension

$U = 0 \iff$ fil électrique

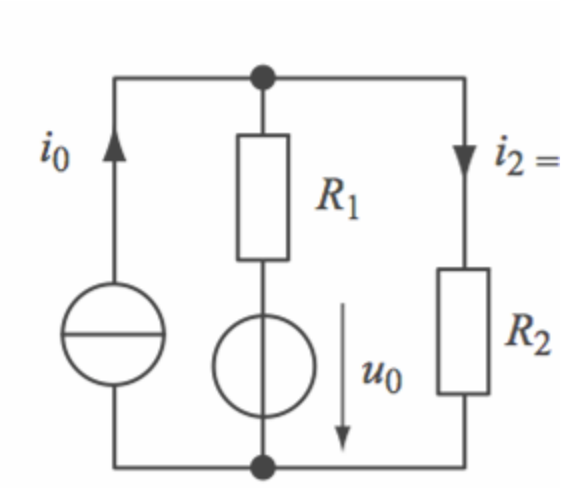


$I = 0 \iff$ circuit ouvert.

* Source de courant.

EPFL

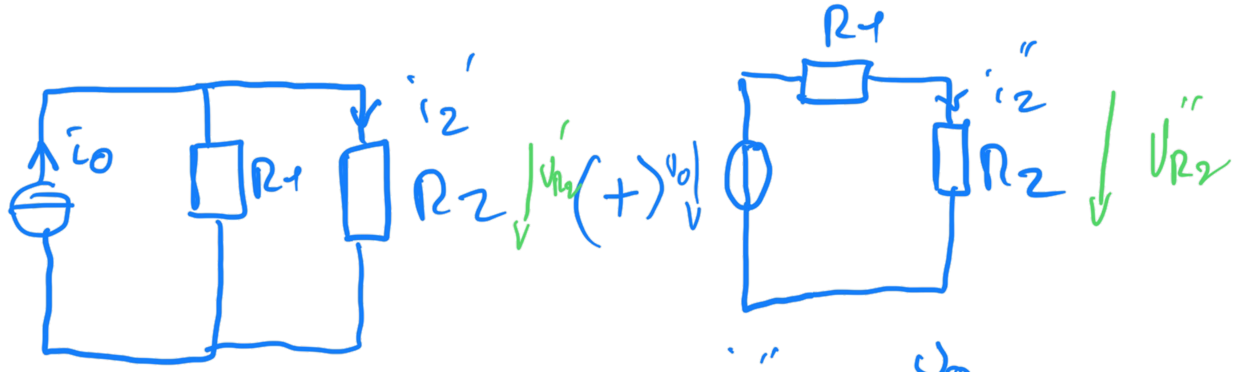
Exemple



$i_2 = i_2' + i_2''$

$\downarrow U_{R_2}$

$\equiv$



$$i_2' = i_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$i_2'' = \frac{u_0}{R_1 + R_2}$$

$$\Rightarrow \underline{i_2 = i_2' + i_2''} \qquad \underline{U_{R_2} = U_{R_2}' + U_{R_2}''}$$

- Circuit complexe
- → somme de circuits plus simples
- Les éléments doivent être linéaires
- Prêter attention aux signes

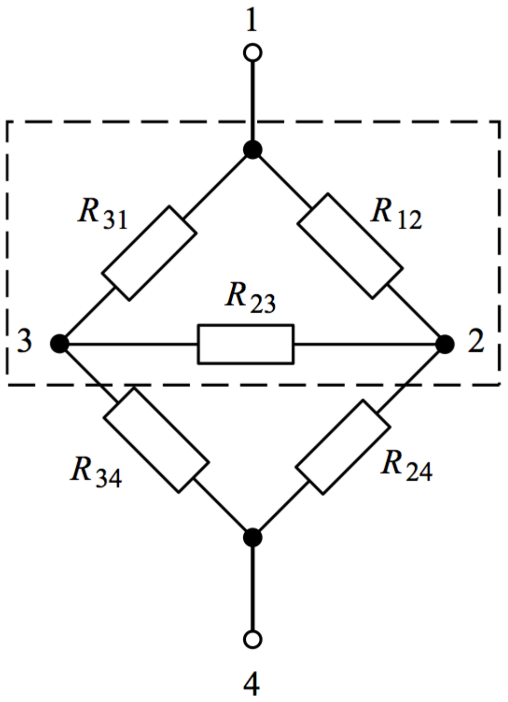
5.9 TRANSFORMATION Π-T

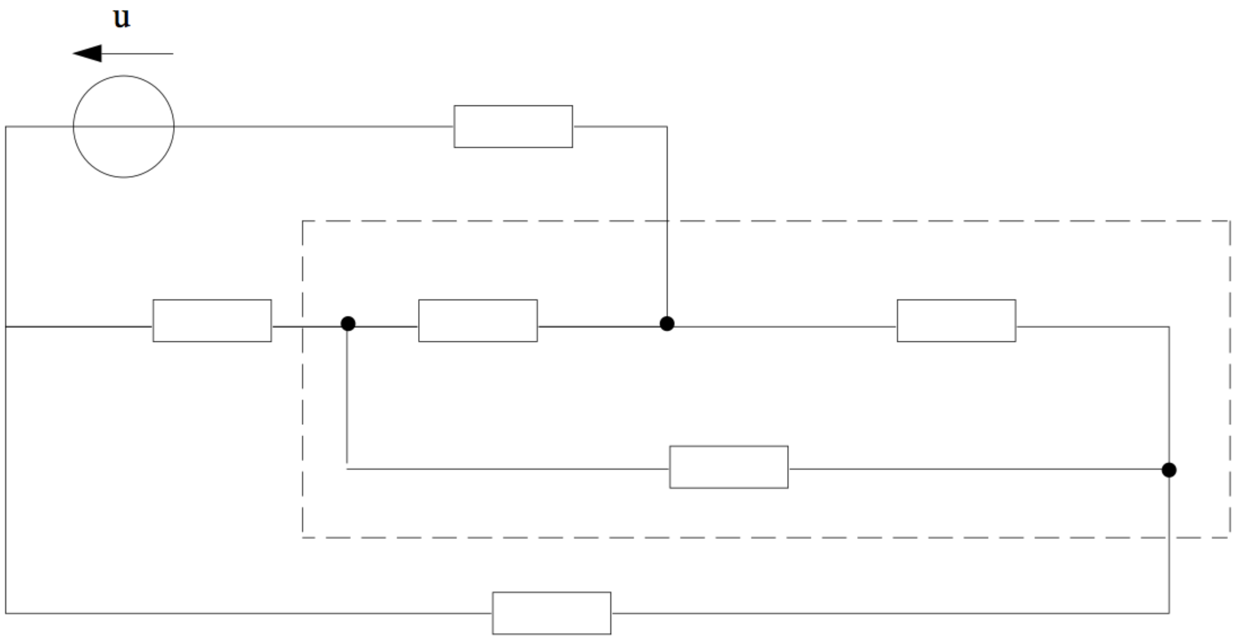
Électrotechnique I
Yves PERRIARD & Yoan CIVET
Laboratoire d'Actionneurs Intégrés

Introduction

- Circuits particuliers
- Trois éléments (tripôle) connectés
  - « en π » , « en triangle » ou « en Δ »
  - « en T » , « en étoile » ou « en Y »
- Equivalence

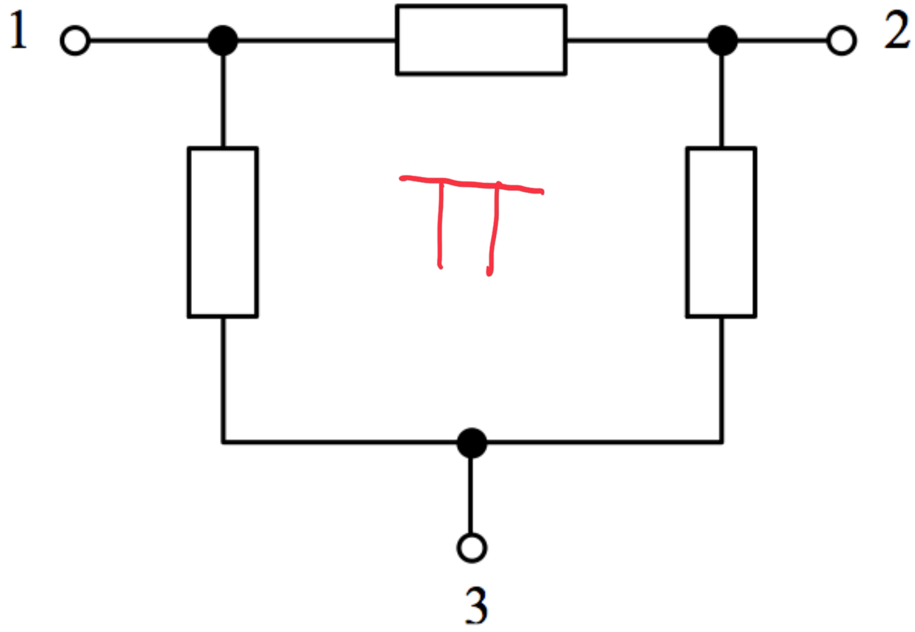
Exemples de circuits difficiles à simplifier



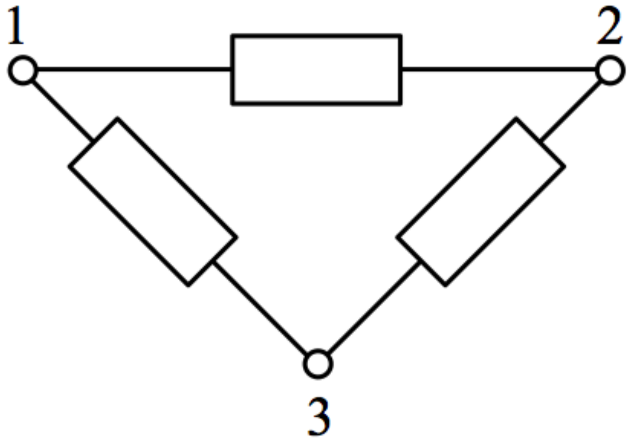


EPFL

Tripôles « en π » (ou « en triangle » , « en Δ » ou « *Delta connection* »)

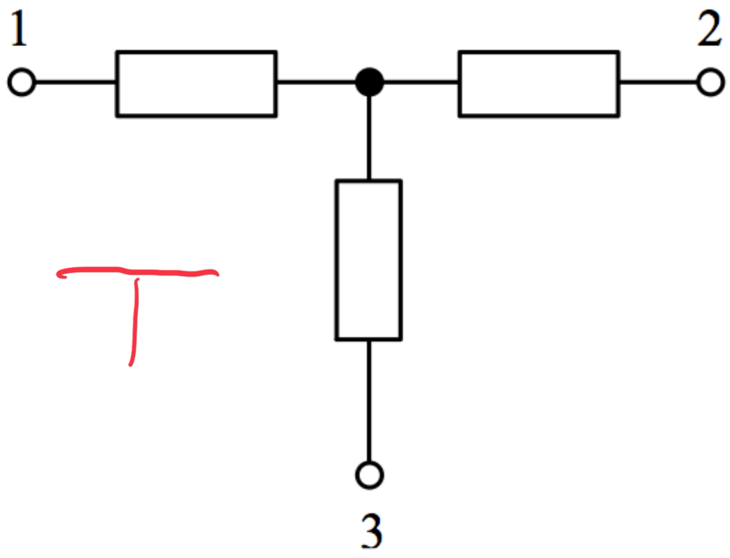


$\equiv$

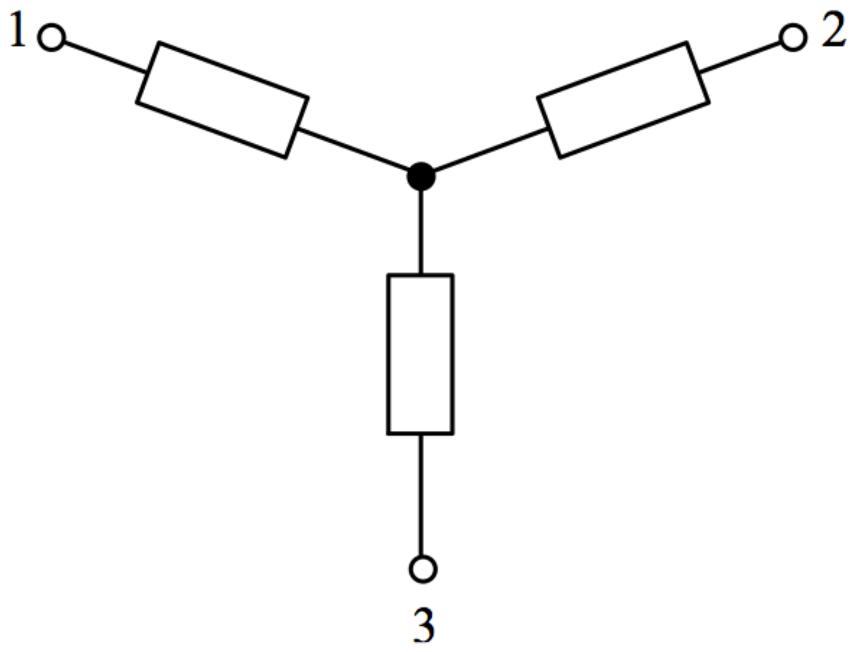


EPFL

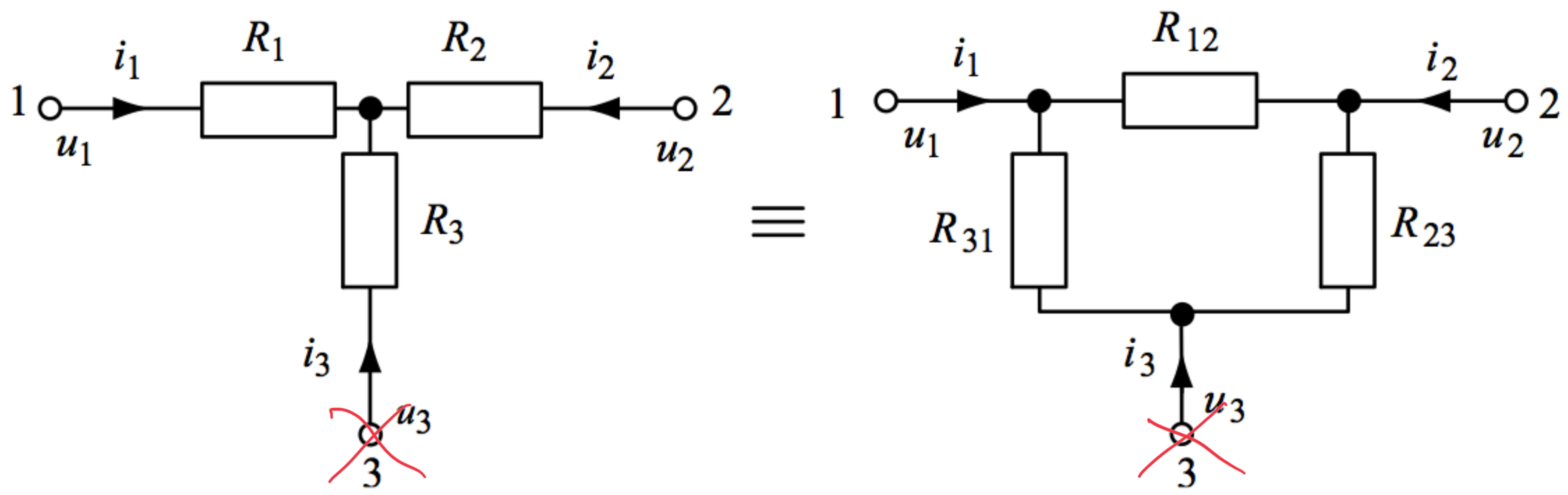
Tripôles « en T » (ou « en étoile », « en Y » ou « *Star connection* »)



≡



Équivalence de tripôles « en T » et « en π »

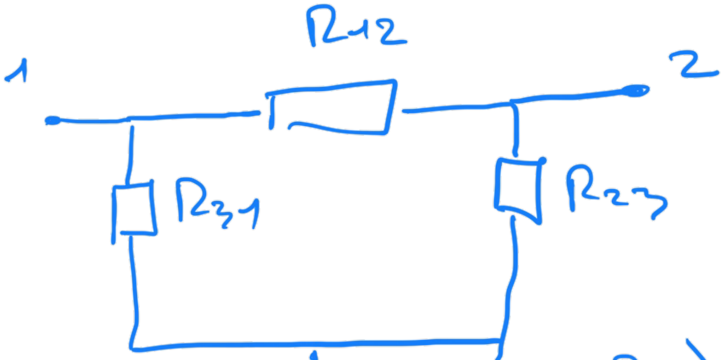


EPFL

Équivalence de tripôles « en T » et « en π »

Si on annule la borne 3

$\equiv$

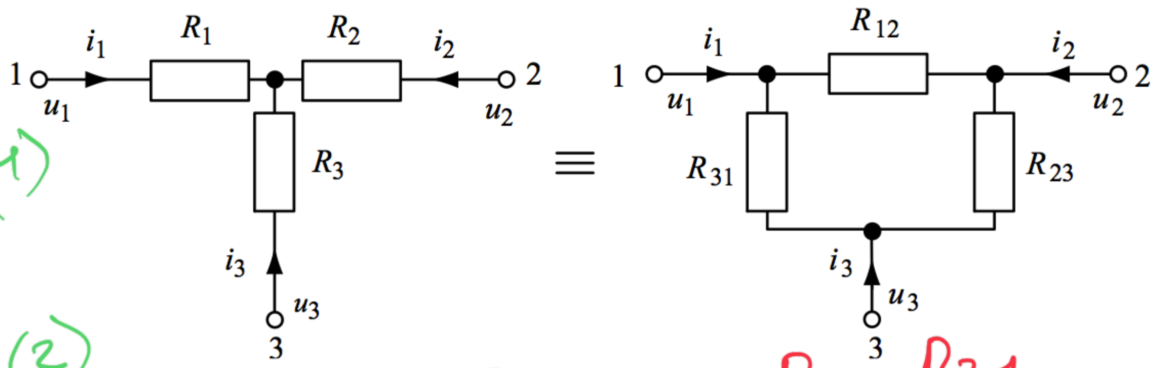


$$R_{eq_1} = R_1 + R_2$$

$$R_{eq_2} = \frac{R_{12}(R_{31}+R_{23})}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}$$

$$\Rightarrow R_1 + R_2 = \frac{R_{12}(R_{31}+R_{23})}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}$$

TRANSFORMATION Π-T



$$R_1 + R_2 = \frac{R_{12}(R_{23}+R_{31})}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \quad (1)$$

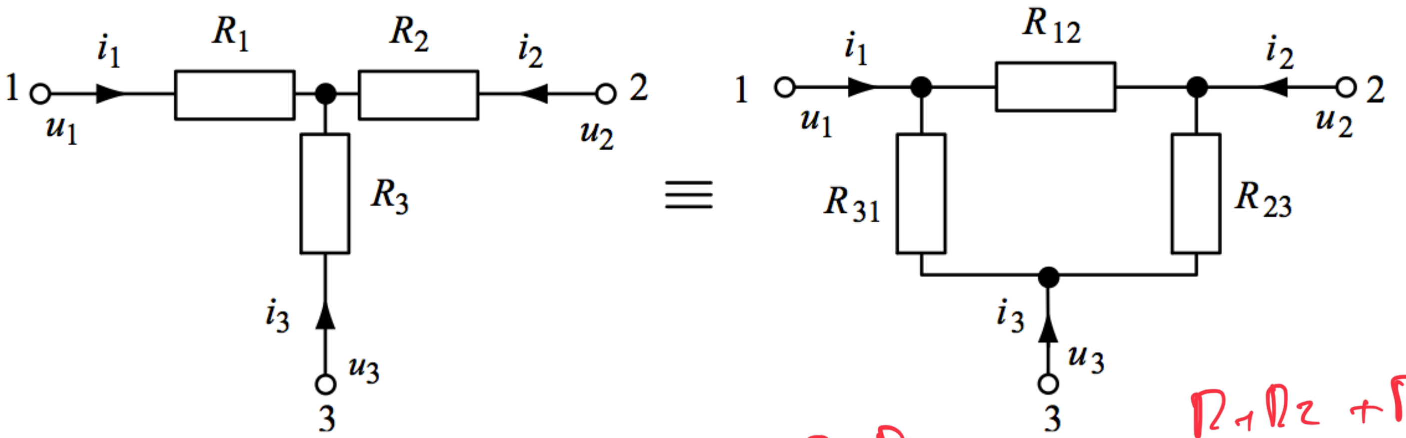
$$R_2 + R_3 = \frac{R_{23}(R_{12}+R_{31})}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \quad (2)$$

$$R_3 + R_1 = \frac{R_{31}(R_{12}+R_{23})}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2}\left[(1)-(2)+(3)\right] \rightarrow \left\{ \begin{aligned} R_1 &= \frac{R_{12}\,R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \\ R_2 &= \frac{R_{12}\,R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \\ R_3 &= \frac{R_{23}\,R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \end{aligned} \right.$$

EPFL

Équivalence de tripôles « en T » et « en π » - Opération inverse

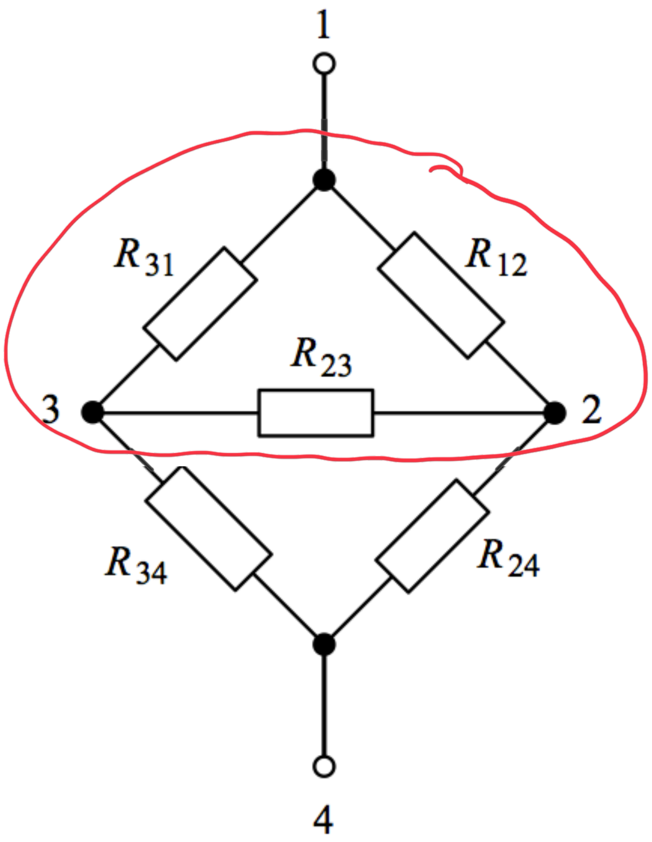


$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3} = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_3}$$

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1}$$

$$R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 R_1}{R_2}$$

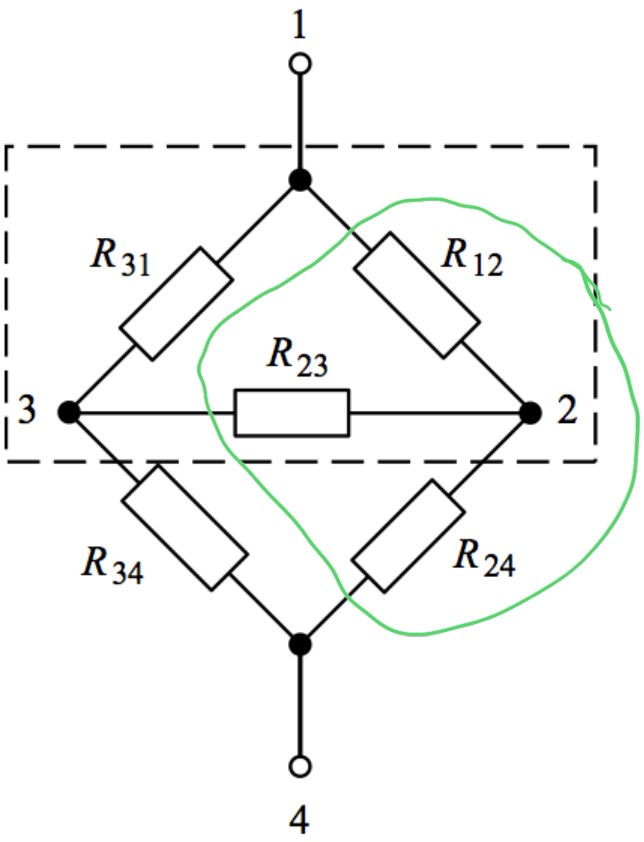
Exemple



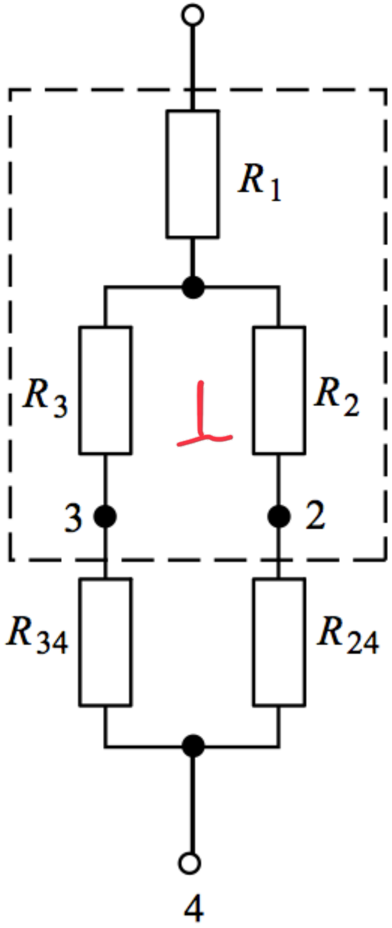
EPFL

Exemple

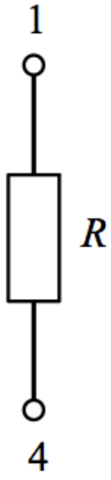
$$R = R_1 + \frac{(R_2+R_{24})(R_3+R_{34})}{R_2+R_{24}+R_3+R_{34}}$$



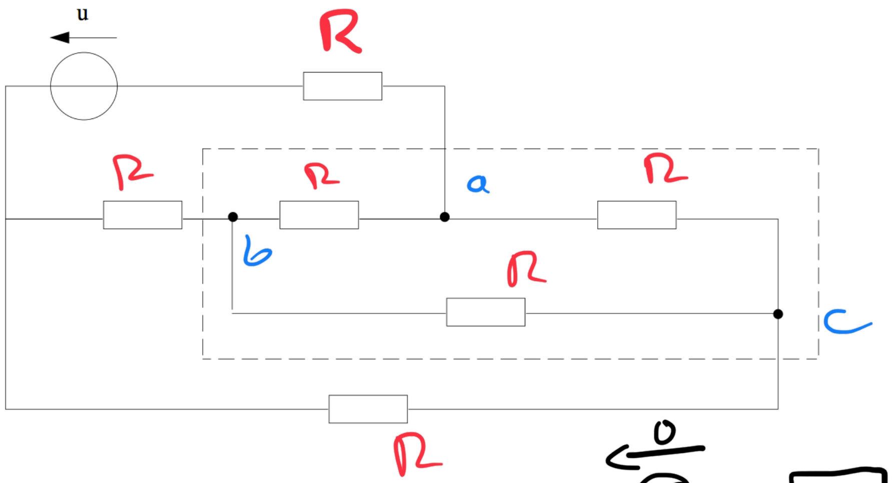
≡

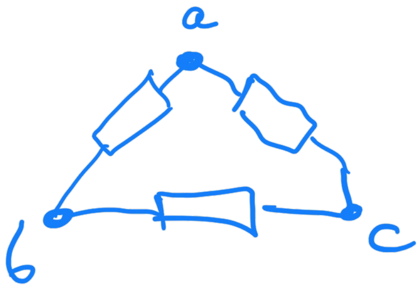


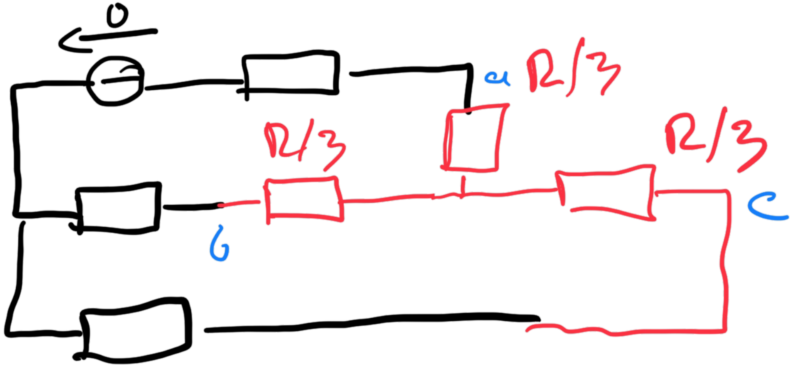
≡



Exemple





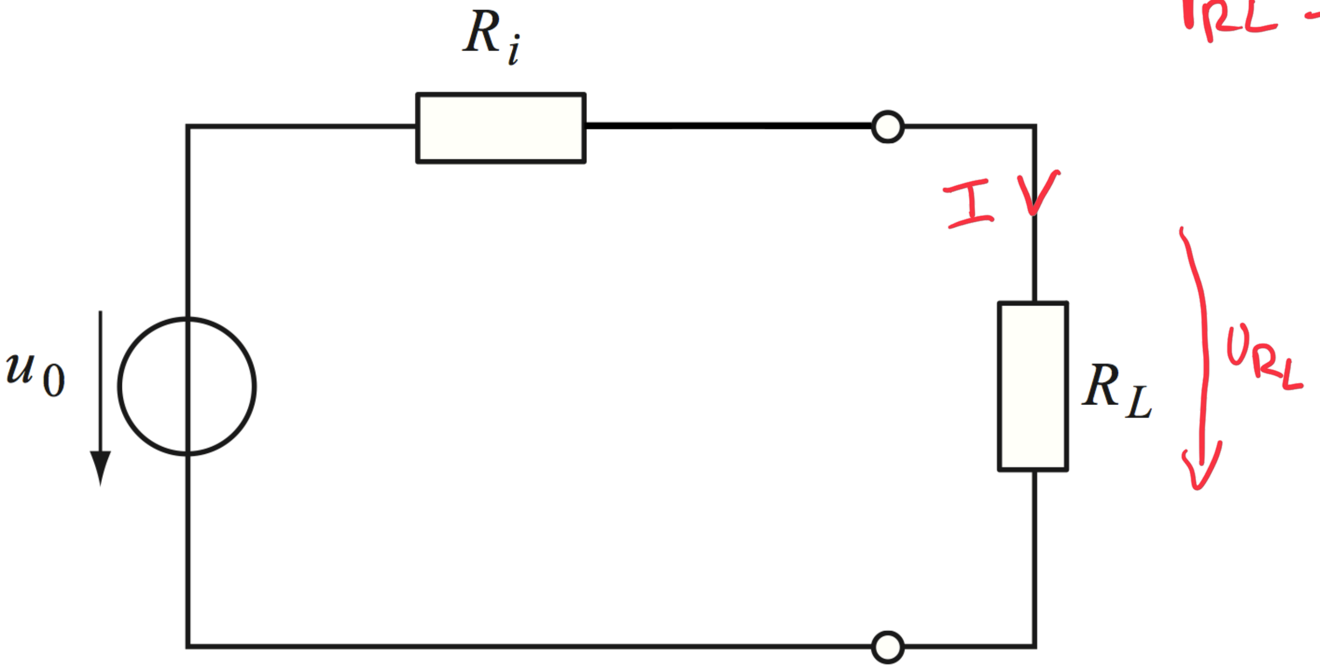


5.11 PUISSANCE MAXIMALE ET ADAPTATION

Électrotechnique I

Yves PERRIARD & Yoan CIVET
Laboratoire d'Actionneurs Intégrés

Source de tension réelle – Charge – Puissance



$$P_{RL} = U_{RL} I = R_L I^2$$

où $I = \dfrac{U_0}{R_L + R_i}$

$$\Rightarrow P_{RL} = \frac{R_L U_0^2}{(R_i + R_L)^2}$$

R_L ?

pour que P_{RL} soit max.

Puissance maximale

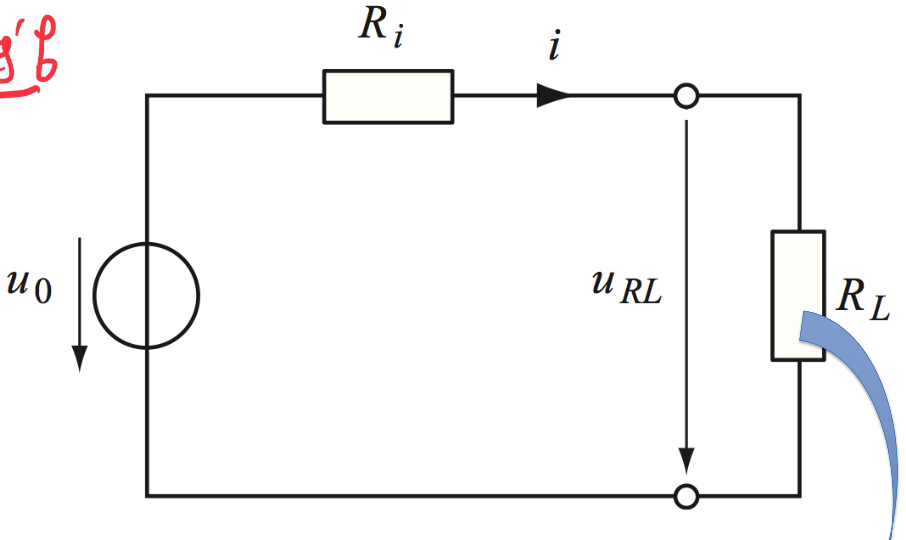
$$\frac{dP_{RL}}{dR_L}$$

$$P_{RL} = \frac{f}{g} \qquad \frac{dP_{RL}}{dR_L} = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

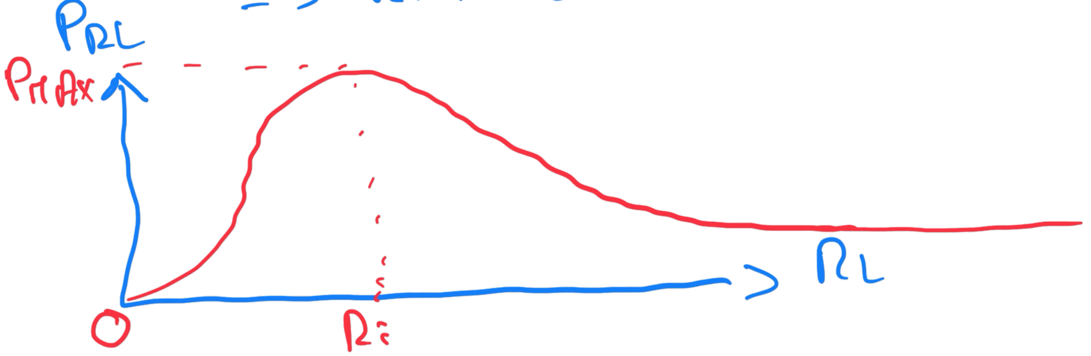
$$\frac{dP_{RL}}{dR_L} = \frac{U_0^2 (R_L+R_i)^2 - 2U_0^2 R_L (R_L+R_i)}{(R_L+R_i)^4} = 0$$

$$\Rightarrow R_i^2 = R_L^2$$

$$\Rightarrow R_i = R_L$$



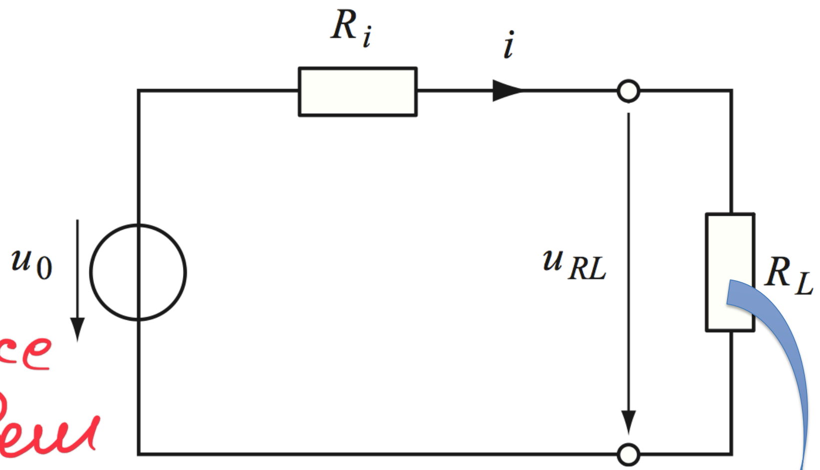
$$P_{RL} = \frac{{u_0}^2 R_L}{(R_L + R_i)^2}$$



Puissance maximale

Condition : $R_L = R_i$

La condition d'adaptation de puissance est donc réalisée lorsque la valeur de la résistance de charge et celle de la résistance interne de la source sont égales.



$$P_{RL} = \frac{u_0{}^2 R_L}{(R_L + R_i)^2}$$

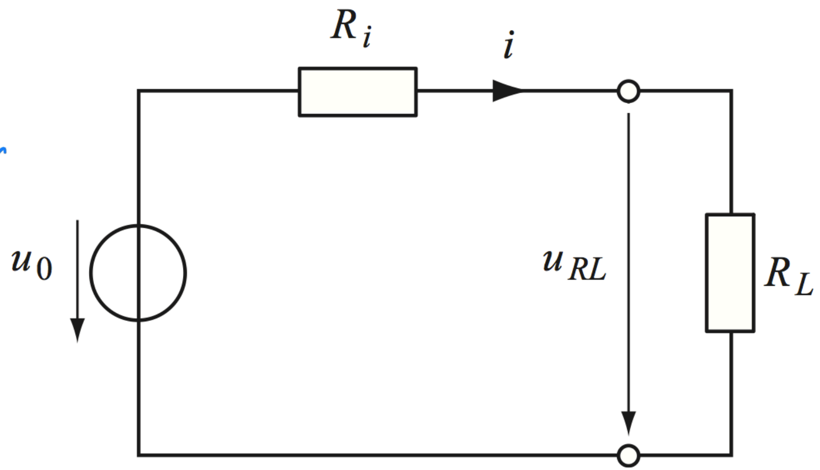
EPFL

Rendement

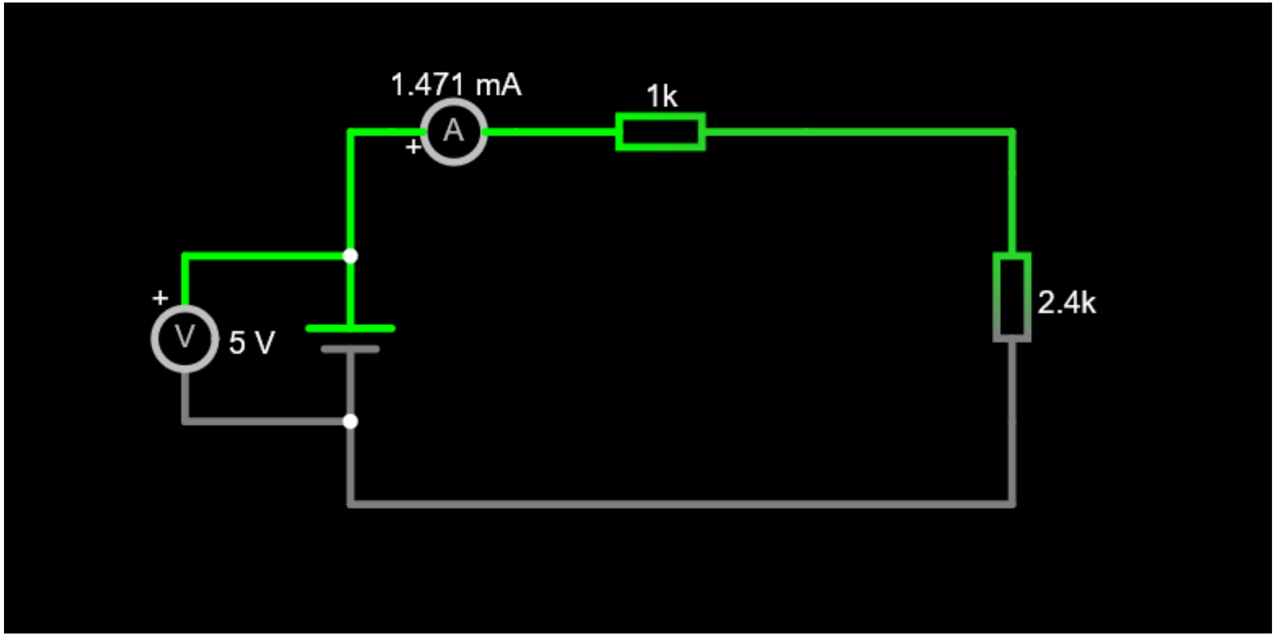
$$\eta = \frac{P_{utile}}{P_{consommée}} = \frac{R_L \cancel{I^2}}{(R_L + R_i)\cancel{I^2}}$$

si $R_L = R_i$

$$\eta = 0,5$$



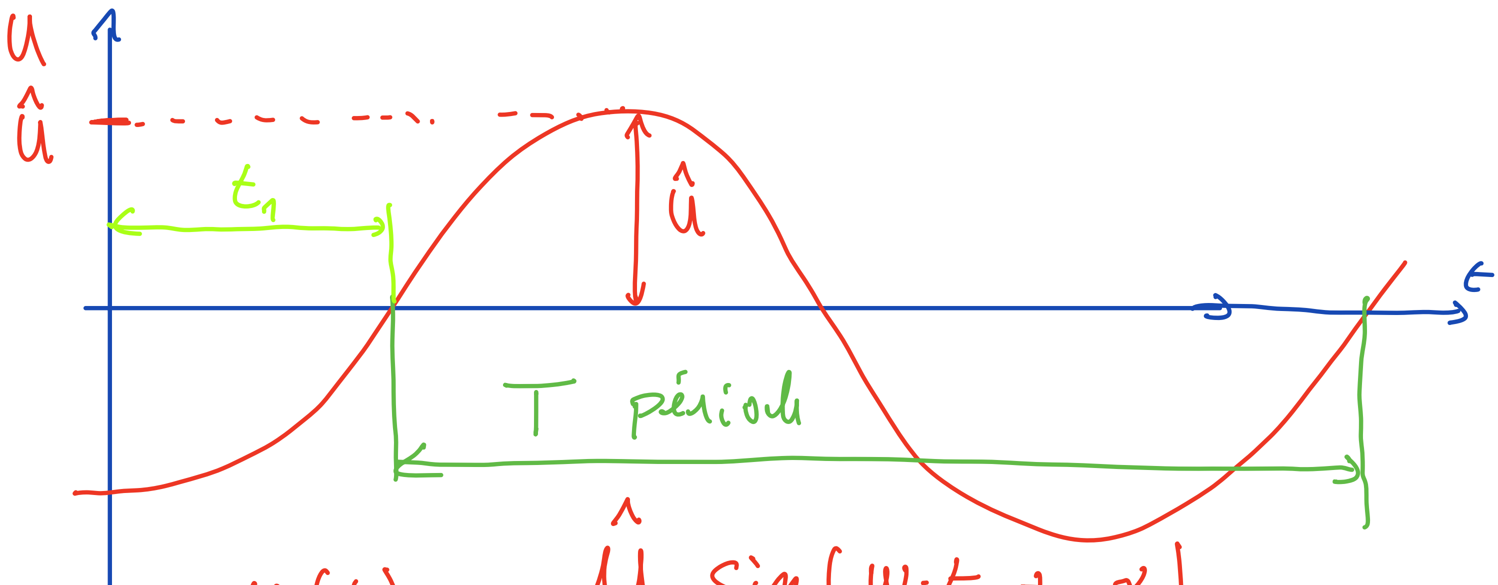
Simulation sous Falstad



https://www.falstad.com/circuit/

6. Régime Sinusoïdal Monophasé

6.2 Grandeurs Sinusoïdales :



$$u(t) = \hat{U} \sin(\omega \cdot t + \alpha)$$

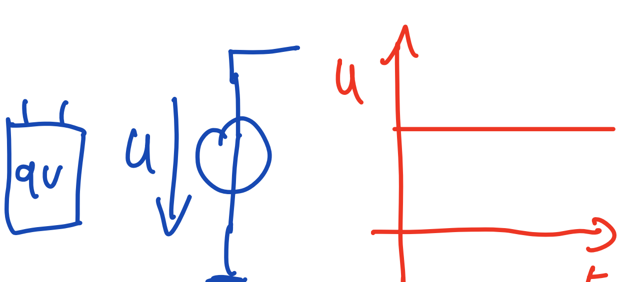
T = période du signal (s)

f = fréquence $= \dfrac{1}{T}$

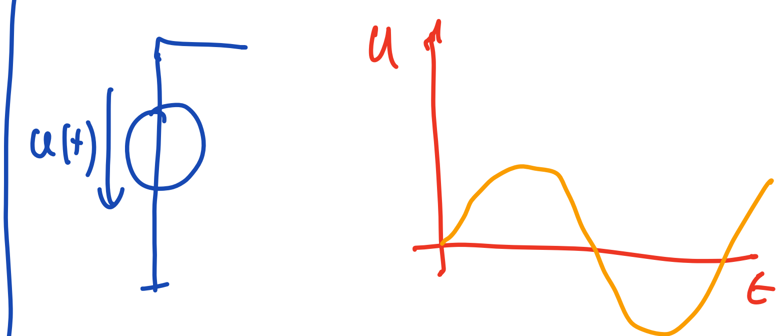
ω = pulsation $= \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f$

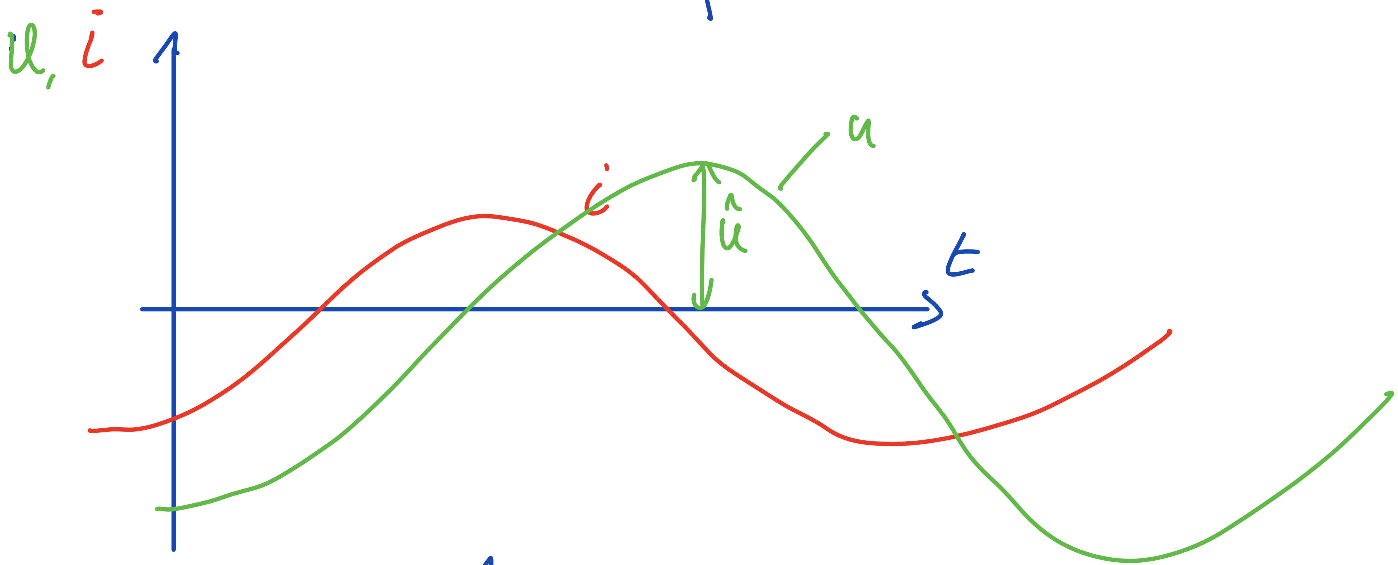
$$\alpha = \frac{t_1 \cdot 2\pi}{T}$$

Continu



Sinus





$$u(t) = \hat{U} \sin(\omega t + \alpha) = u$$

$$i(t) = \hat{I} \sin(\omega t + \beta) = i$$

Définition : $\varphi = \alpha - \beta$ (Déphasage entre u et i

Définition de la valeur moyenne :

$$\bar{X} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)\, dt$$

Moyenne

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T \hat{U} \sin(\omega t + \alpha)\, dt = 0$$

Moyenne de $u(t)$, sur $T/2$:

$$\bar{u}\Big|_{T/2} = \frac{1}{T/2}\int_0^{T/2} \hat{u}\sin(\omega t)\,dt$$

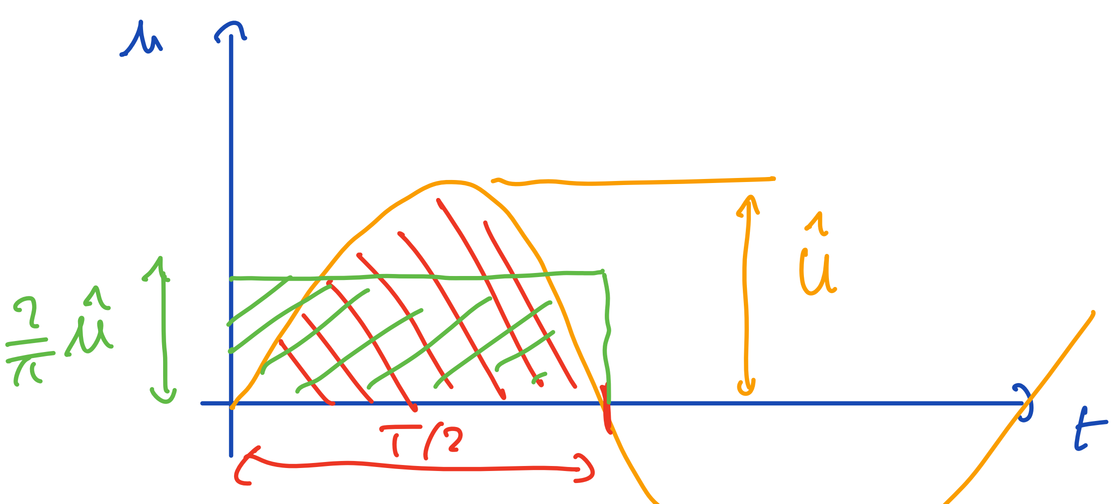
On pose $\alpha = 0$

$$= \frac{2\hat{u}}{T}\,\frac{1}{\omega}\left[-\cos\left(\frac{T}{2}\cdot\omega\right) + \cos(0)\right]$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$= \frac{\cancel{2}\hat{u}\cancel{T}}{\cancel{T}\cdot\cancel{2}\pi}\left[-\cos\left(\frac{\cancel{T}}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{T}}\right) + \cos(0)\right]$$

$$= \frac{\hat{u}}{\pi}\left[1 + 1\right] = \frac{2}{\pi}\cdot\hat{u}$$



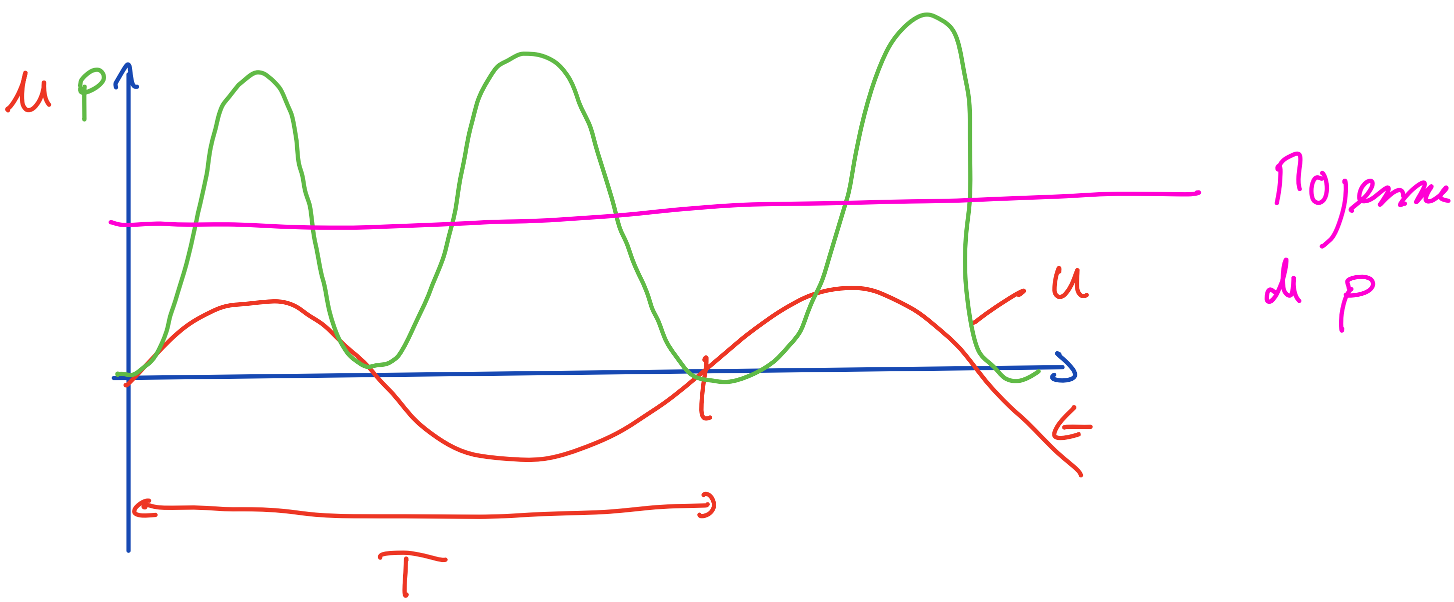
6.2.13 Puissance instantanée

$$p = u \cdot i$$ (en fonction du temps)

Calcul de la puissance dissipée dans une Résistance :

$$p = R \cdot i^2 = \frac{u^2}{R}$$

$$p = \frac{u^2}{R} = \frac{\hat{U}^2 \sin^2(\omega t + \alpha)}{R}$$



T

$$\overline{P}_R = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\hat{u}^2}{R}\sin^2(\omega t+\alpha)\,dt$$

$$\overline{P}_R = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\hat{u}^2}{R}\cos^2(\omega t+\alpha)\,dt$$

$+$

$$2\,\overline{P}_R = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\hat{u}^2}{R}\cdot 1\,dt$$

$$2\,\overline{P}_R = \frac{\hat{u}^2}{R}$$

$$\overline{P}_R = \frac{\hat{u}^2}{2R}$$

En continu : $P_R = \overline{P}_R = \dfrac{u^2}{R}$

6.2.12 Définition de la valeur efficace (RMS Root Mean Square)

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \hat{u}^2 \sin^2(\omega t+\alpha\ dt}$$

moyenne

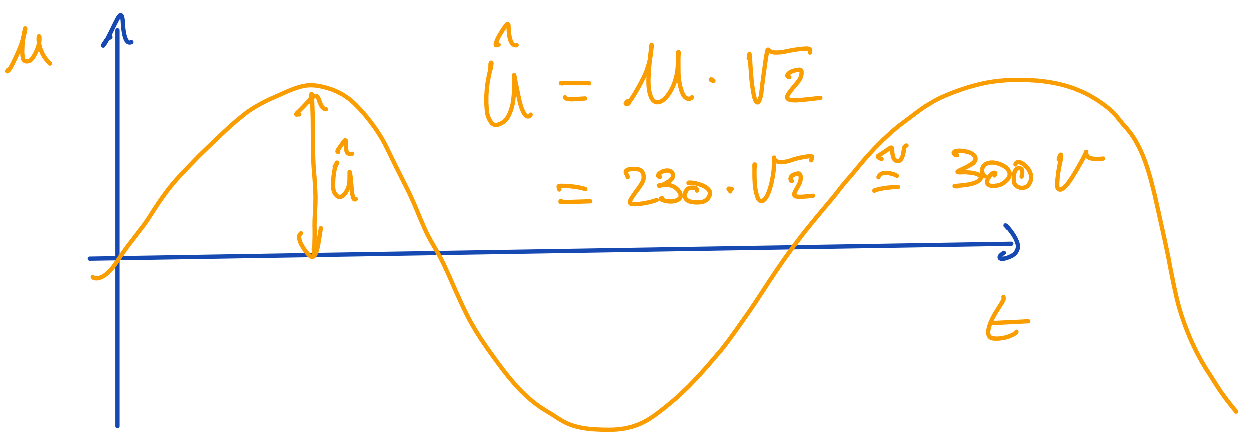
$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$U = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} \quad (\text{efficace})$$

$$\hat{U} = U \cdot \sqrt{2}$$

crête efficace

$$\bar{P}_R = \frac{\hat{U}^2}{2R} = \frac{U^2}{R} = P_{R \text{ en DC}}$$



u, i : Valeurs instantanées

U, I : " efficaces

$\hat{U}, \hat{I}$: " crêtes

$\bar{u}, \bar{i}$: " moyennes

6.2.14 cas de R :

$$u = R \cdot i$$

$$\hat{U} \cos(\omega t + \alpha) = R \cdot \hat{I} \cos(\omega t + \beta)$$

Donc $\hat{U} = R \cdot \hat{I}$

$\alpha = \beta$ u est en phase avec i

6.2.15 cas de L

$$u = L \frac{di}{dt}$$

$$\hat{U} \cos(\omega t + \alpha) = -\omega L \hat{I} \sin(\omega t + \beta)$$

$$= + \omega L \hat{I} \cos\left(\omega t + \beta + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\hat{U} = \omega L \hat{I}$$

$\alpha = \beta + \frac{\pi}{2}$ Tension et le courant sont en quadrature : retard du courant de $\frac{\pi}{2}$ sur la tension

6.2.16 Cas de C

$$i = C \frac{du}{dt}$$

$$\hat{I}\cos(\omega t + \beta) = -\omega C \hat{U} \sin(\omega t + \alpha)$$

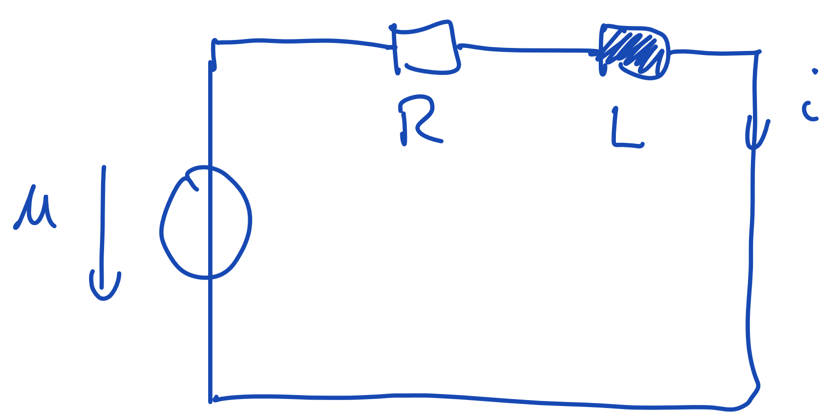
$$= \omega C \hat{U} \cos\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\hat{U} = \frac{\hat{I}}{\omega C}$$

$$\alpha = \beta - \frac{\pi}{2}$$

Tension et courant sont en quadrature : avance du courant de $\frac{\pi}{2}$ sur la tension

6.3 Calcul complexe associé :



$$u = \hat{U} \sin(\omega t + \alpha) \quad \text{connu}$$

$i = \hat{I}\sin(\omega t + \beta)$ inconnu ?

comme l'origine du temps est arbitraire :

on pose $\alpha = 0$

$$u = R \cdot i + L\frac{di}{dt}$$

$$\hat{U}\sin(\omega t) = R\hat{I}\sin(\omega t + \beta) + L\omega\hat{I}\cos(\omega t + \beta)$$

Autre méthode :

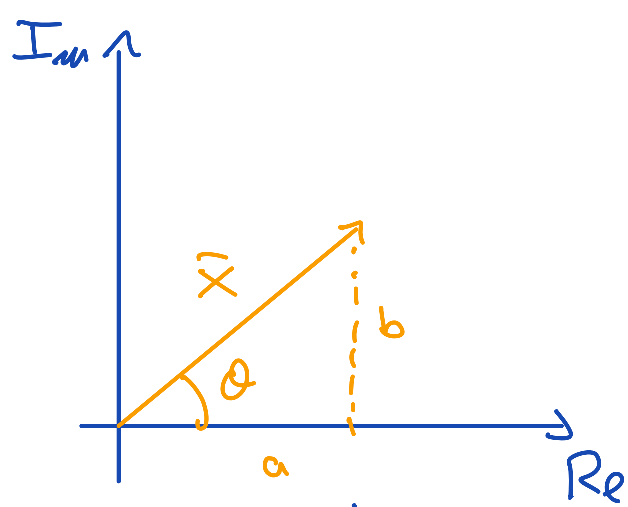
nb complexe : $j = \sqrt{-1}$

Rappel :

$$\underline{X} = a + bj$$

$\uparrow$

vecteur



$$\underline{X} = \hat{X}\left(\cos(\theta) + j\sin(\theta)\right)$$

$$\underline{X} = \hat{X}e^{j\theta}$$

Formule d'Euler

Concept :

$$u = \hat{U}\sin(\omega t) \xrightarrow{\text{trans. complex}} \underline{u} = \hat{U}e^{j(\omega t)}$$

calcul

$$\xleftarrow{u = \mathrm{Im}\{\underline{u}\}}$$

$$i = \hat{I}\sin(\omega t+\beta) \longrightarrow \underline{i} = \hat{I}e^{j(\omega t+\beta)}$$

$$\xleftarrow{i = \mathrm{Im}\{\underline{i}\}}$$

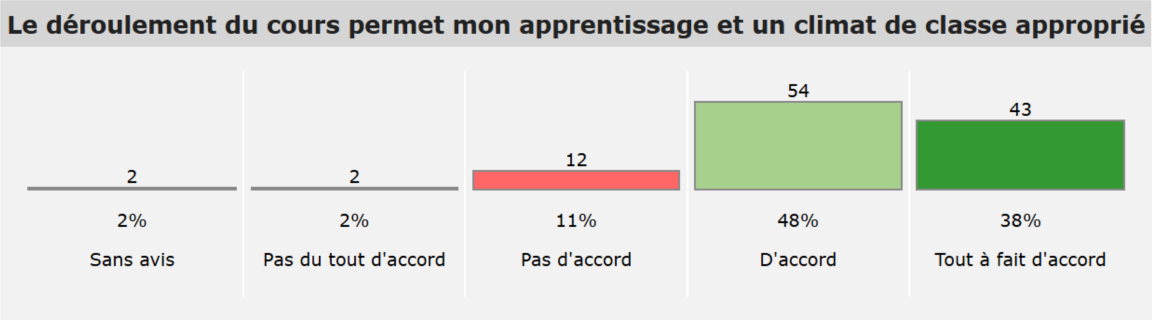
FEEDBACK
5.7 THÉORÈMES DE THÉVENIN ET DE NORTON
QUIZ
6. RÉGIME PERMANENT SINUSOÏDAL

Rappel sur les complexes
Calcul complexe associé: circuit RL et circuit RC
Définitions : Impédance…
Exemple d'un circuit RLC avec les impédances

Électrotechnique I
Yves PERRIARD & Yoan CIVET
Laboratoire d'Actionneurs Intégrés

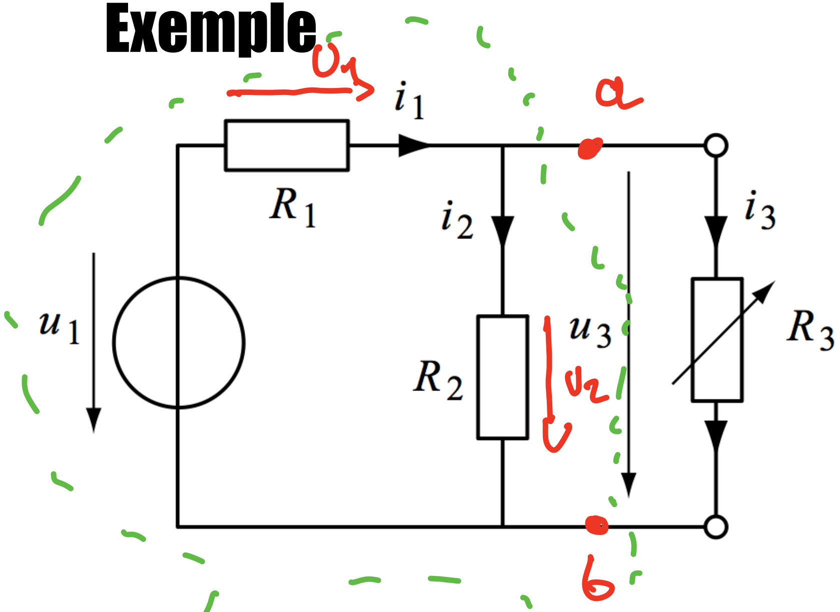
FEEDBACK ETUDIANTS

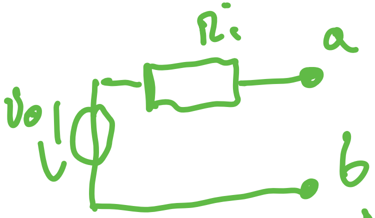
- 266 étudiants
- 113 Réponses

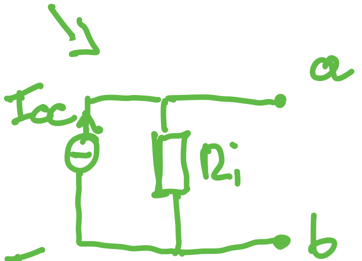


- Mais…

Exemple

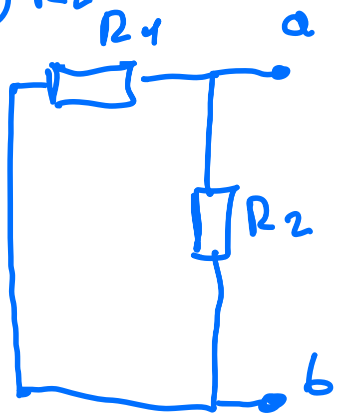






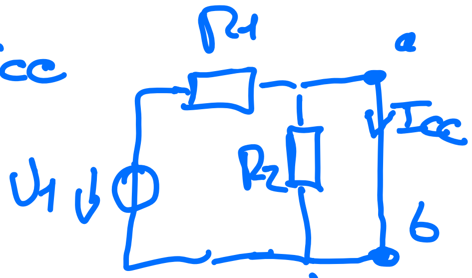
$U_0 = R_i I_{cc}$

① R_i



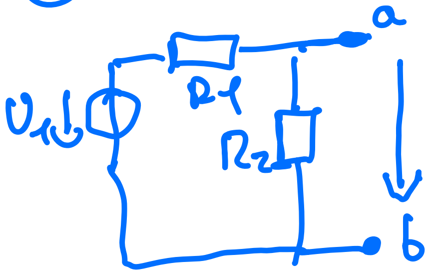
$$R_i = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

② I_{cc}



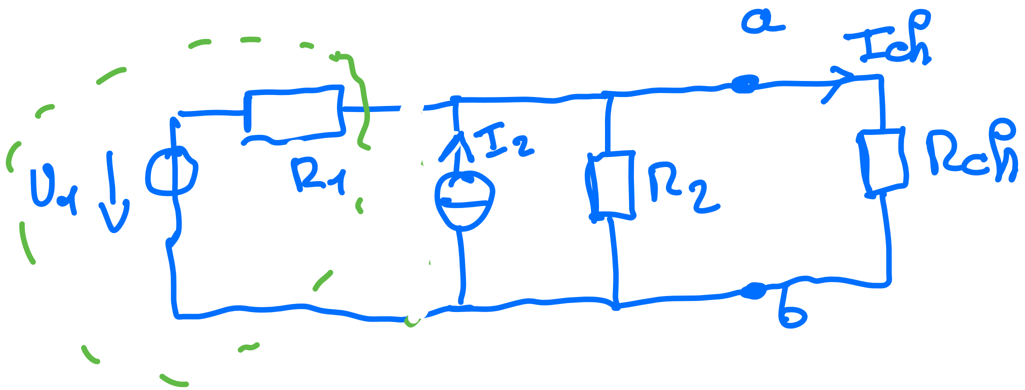
$$I_{cc} = \frac{U_1}{R_1}$$

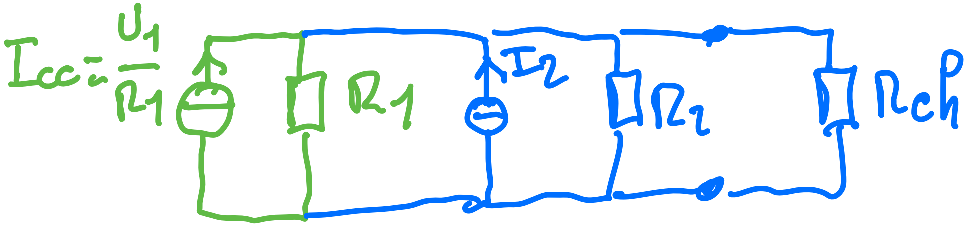
③ Tension à vide



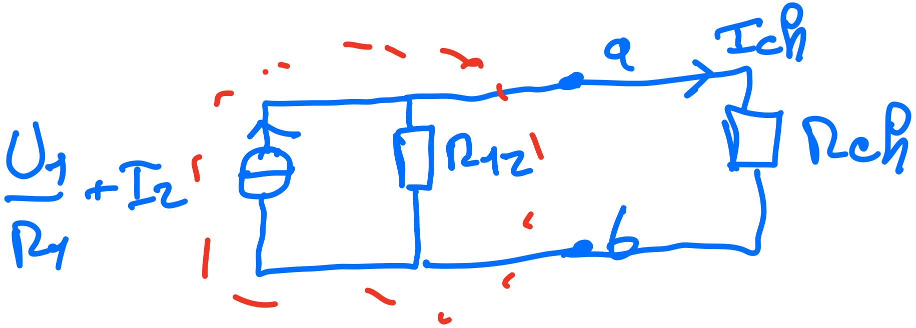
$$U_{ab} = U_0 = U_{R_2} = U_1 \times \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Autre exemple

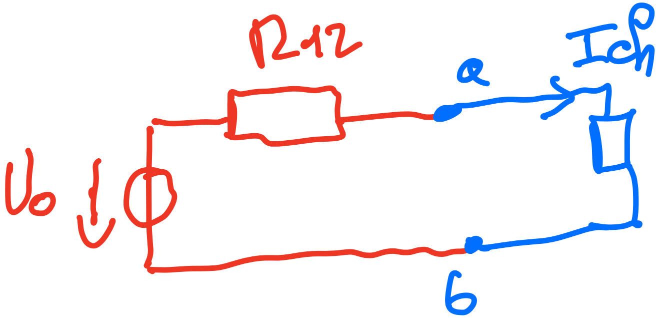




Autre exemple

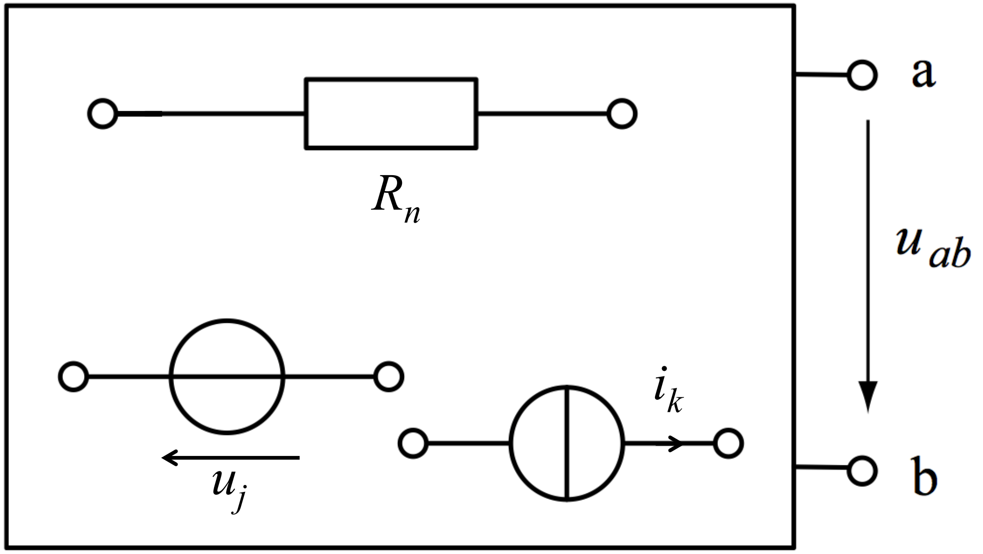


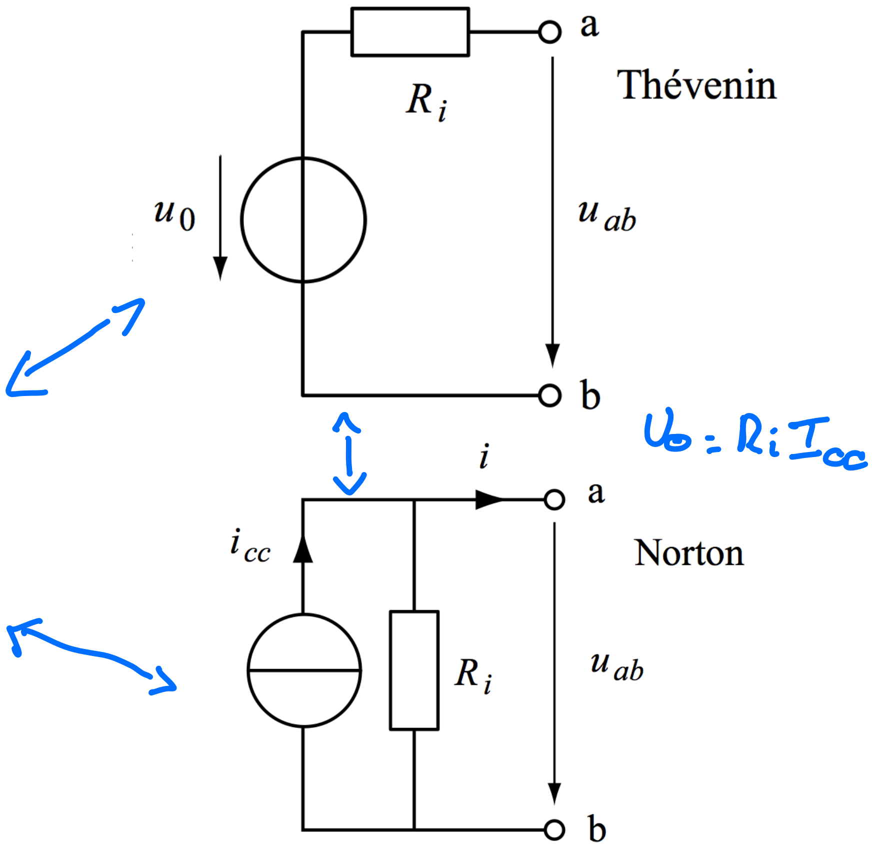
$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$



$$U_0 = \left(\frac{U_1}{R_1} + I_2\right) R_{12}$$

Généralisation





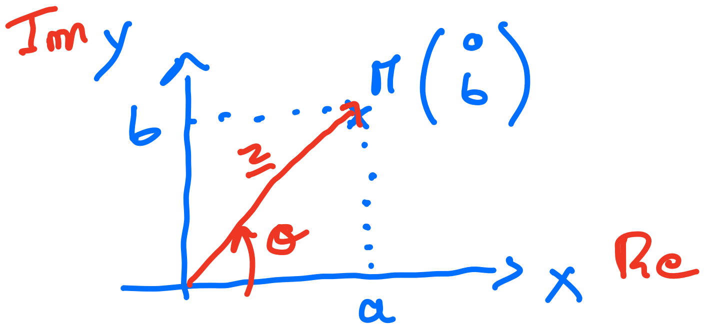
6. RÉGIME PERMANENT SINUSOÏDAL

RAPPEL SUR LES COMPLEXES

CALCUL COMPLEXE ASSOCIÉ: CIRCUIT RL ET CIRCUIT RC
DÉFINITIONS : IMPEDANCE…
EXEMPLE D'UN CIRCUIT RLC AVEC LES IMPÉDANCES

Électrotechnique I
Yves PERRIARD & Yoan CIVET
Laboratoire d'Actionneurs Intégrés

RAPPEL NOMBRES COMPLEXES



$\underline{z} = a + ib$ avec $i^2 = -1$ $i \to j$ $j^2 = -1$

$= a + jb$

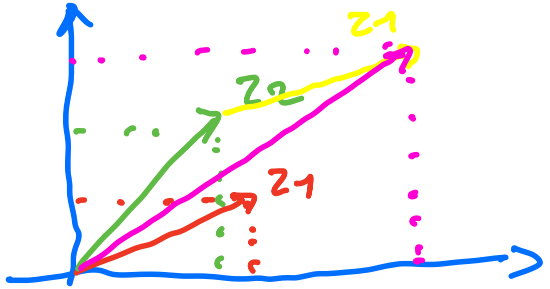
$\underline{z} = |\underline{z}|\cos\theta + j|\underline{z}|\sin\theta$ $|\underline{z}| = \sqrt{a^2+b^2}$

$\underline{z} = |\underline{z}|e^{j\theta}$

$\underline{z_1} = a_1 + jb_1$

$\underline{z_2} = a_2 + jb_2$

$\underline{z_1} + \underline{z_2} = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2) = \underline{z_3}$



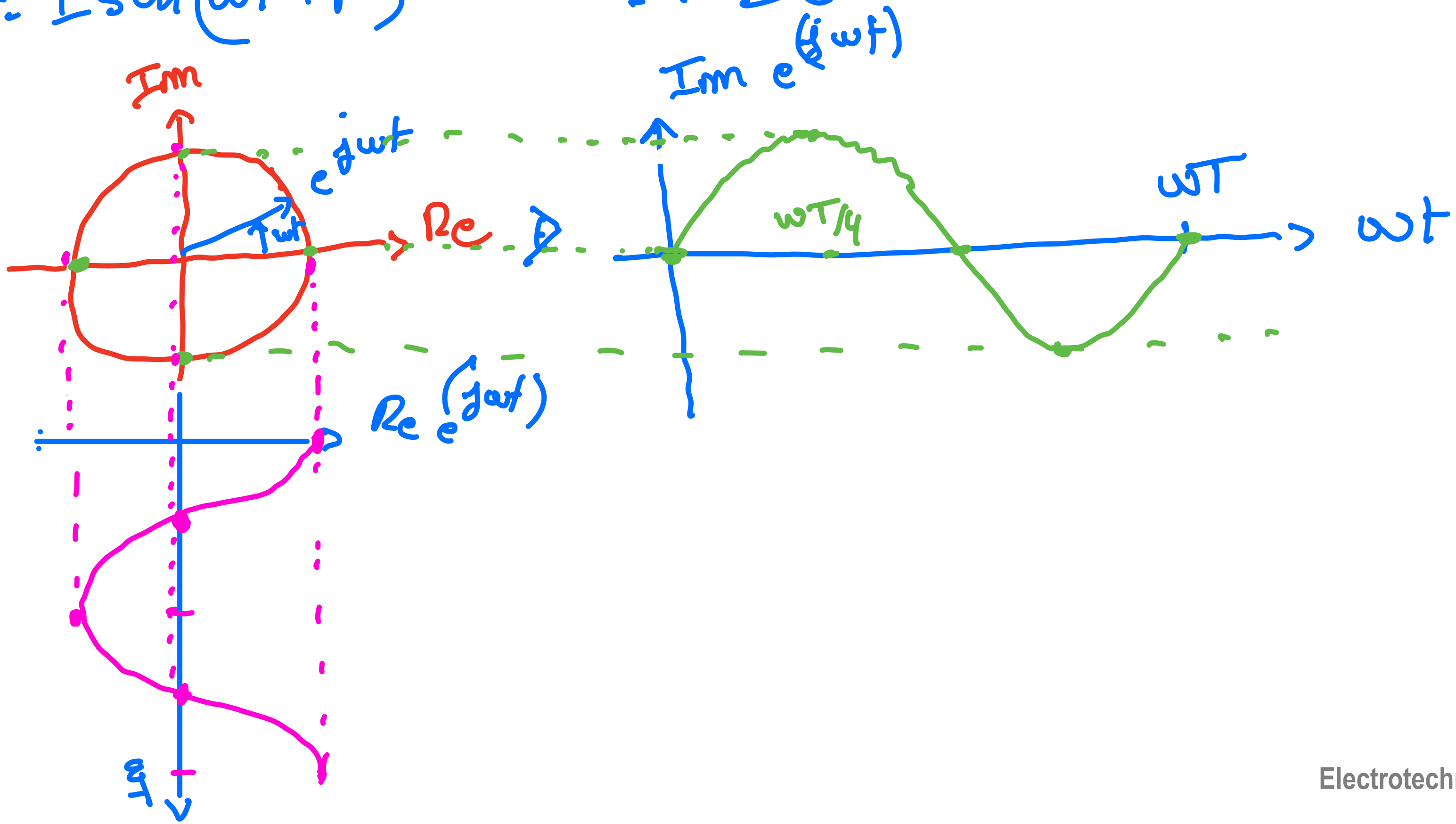
$\frac{d}{d\theta} \to \times j$

$\int d\theta \to \frac{1}{j}$

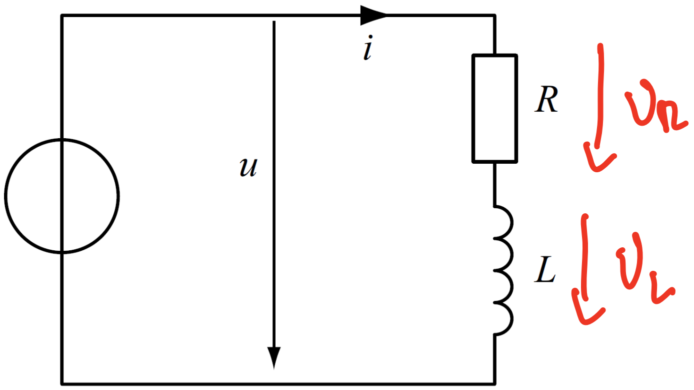
DU COSINUS (OU SINUS) VERS L'EXPONENTIELLE ET INVERSEMENT

$$u(t) = \hat{U}\sin(\omega t + \alpha) \qquad \underline{u} = \hat{U} e^{j(\omega t + \alpha)} \qquad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

$$i(t) = \hat{I}\sin(\omega t + \beta) \quad \xrightarrow{\mathbb{C}} \quad \underline{i} = \hat{I} e^{j(\omega t + \beta)}$$



Cas d'une résistance et d'une inductance en série



$u(t) = \hat{U} \sin(\omega t + \alpha)$
$R, L, \omega, \alpha, \hat{U}$
} connus

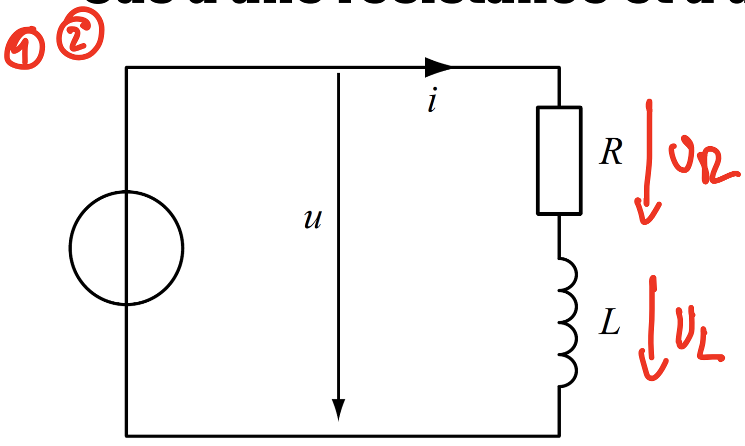
$i(t) = \hat{I} \sin(\omega t + \beta)$
$\hat{I}, \beta$
} ce que l'on cherche.

1. Refaire le schéma
2. Sens tensions et courants
3. Kirchoff
4. On passe en complexe
5. Dériver-intégrer
6. Résoudre en identifiant
7. Solution complexe
8. Retour au réel

6.3 CALCUL COMPLEXE ASSOCIÉ

Cas d'une résistance et d'une inductance en série

1. Refaire le schéma
2. Sens tensions et courants
3. Kirchoff
4. On passe en complexe
5. Dériver-intégrer
6. Résoudre en identifiant
7. Solution complexe
8. Retour au réel



3 $u = Ri + L\frac{di}{dt}$ (0)

4 $u \to \underline{u} = \hat{U}e^{j(\omega t+\alpha)}$

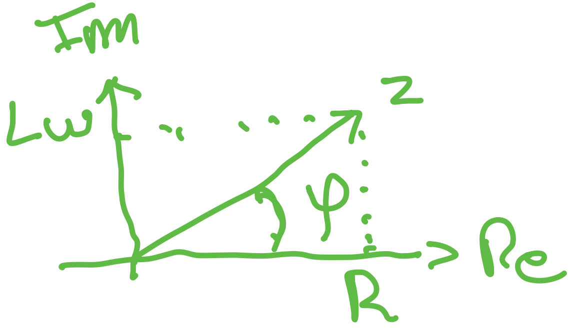
$i \to \underline{i} = \hat{I}e^{j(\omega t+\beta)}$

(0) $\Rightarrow$ $\underline{u} = R\underline{i} + L\frac{d\underline{i}}{dt}$

5 $\underline{u} = R\underline{i} + Lj\omega\underline{i} = \underbrace{(R + j\omega L)}\underline{i} = \underline{Z}\,\underline{i}$

$\underline{Z} = R + j\omega L = |\underline{Z}|e^{j\varphi}$

Impédance



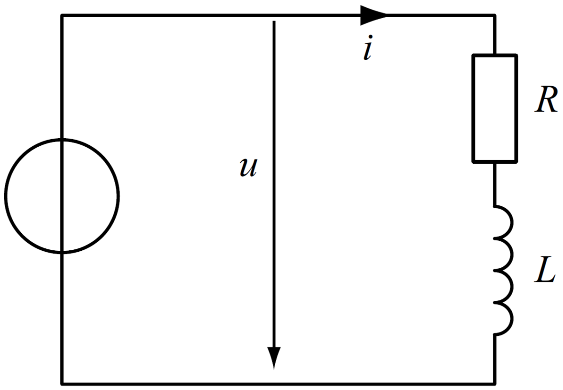
$|\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2}$

$\varphi = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$

$\underline{Z}$ complexe ; $\left.\begin{matrix} Z \\ |\underline{Z}| \end{matrix}\right\}$ norme

Cas d'une résistance et d'une inductance en série

1. Refaire le schéma
2. Sens tensions et courants
3. Kirchoff
4. On passe en complexe
5. Dériver-intégrer
6. Résoudre en identifiant
7. Solution complexe
8. Retour au réel



6 $\underline{u} = \underline{Z}\,\underline{i}$

$$\hat{U} e^{j(\omega t+\alpha)} = Z e^{j\varphi} \cdot \hat{I} e^{j(\omega t+\beta)}$$

$$= Z\hat{I} \cdot e^{j(\omega t+\beta+\varphi)}$$

$$\hat{U} = Z\hat{I}$$

$$\cancel{\omega t} + \alpha = \cancel{\omega t} + \beta + \varphi \Rightarrow \alpha = \beta + \varphi$$

$$\varphi = \alpha - \beta$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

7 $\underline{i} = \hat{I} e^{j(\omega t+\beta)}$

avec $\hat{I} = \frac{\hat{U}}{Z}$ et $\beta = \alpha - \varphi$

8 $i(t) = \mathrm{Im}\{\underline{i}\} = \hat{I}\sin(\omega t + \beta)$

EPFL

Valeur instantanée complexe et phaseurs complexes

1. Valeur instantanée complexe: $\underline{u} = \hat{U} e^{j(\omega t + \alpha)}$ –> dépend du temps
2. Phaseur de crête: $\underline{\hat{U}} = \hat{U} e^{j\alpha}$ –> ne dépend pas du temps
3. Phaseur (avec valeur efficace): $\underline{U} = U e^{j\alpha}$ –> ne dépend pas du temps

Diagramme des phaseurs

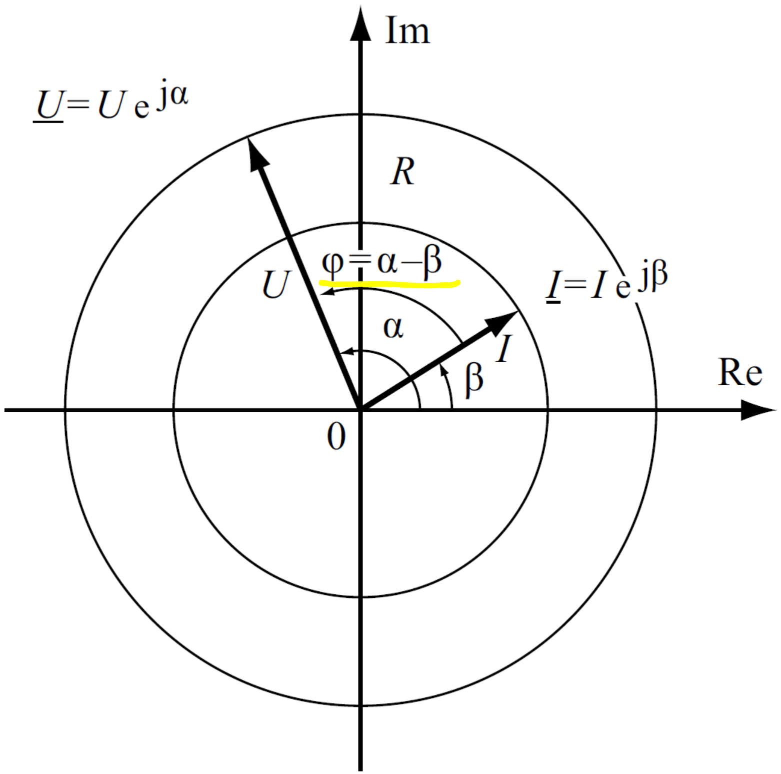
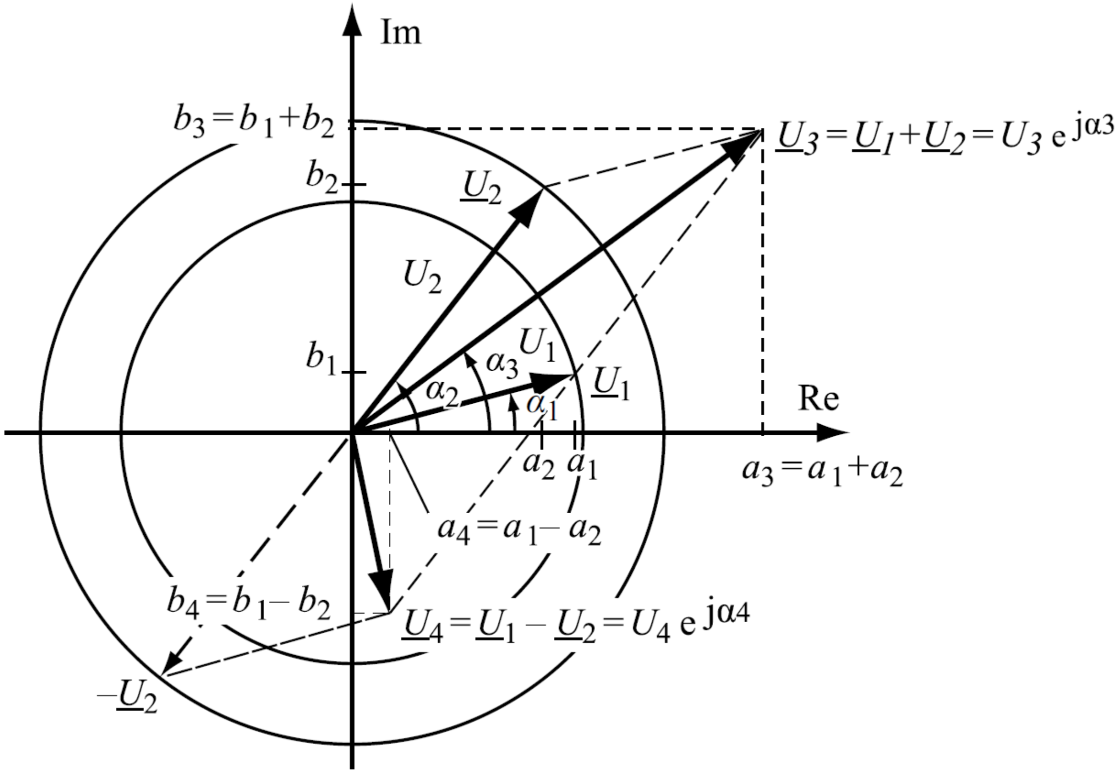
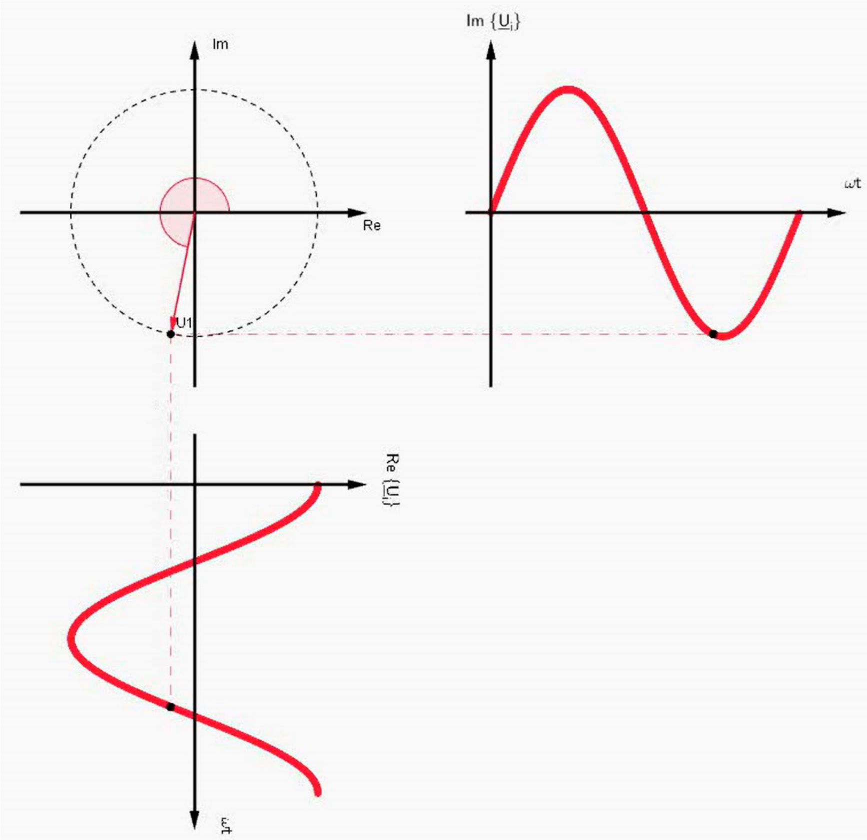


Diagramme des phaseurs

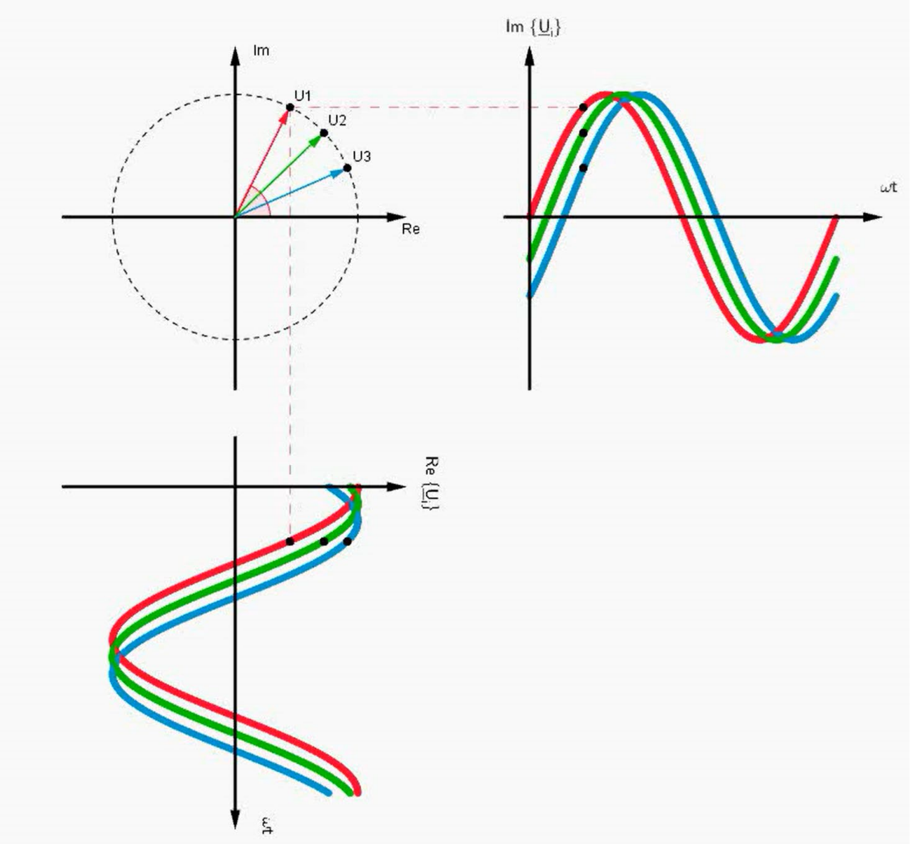


REPRÉSENTATION DE FRESNEL

- Vidéo Fresnel monophasé

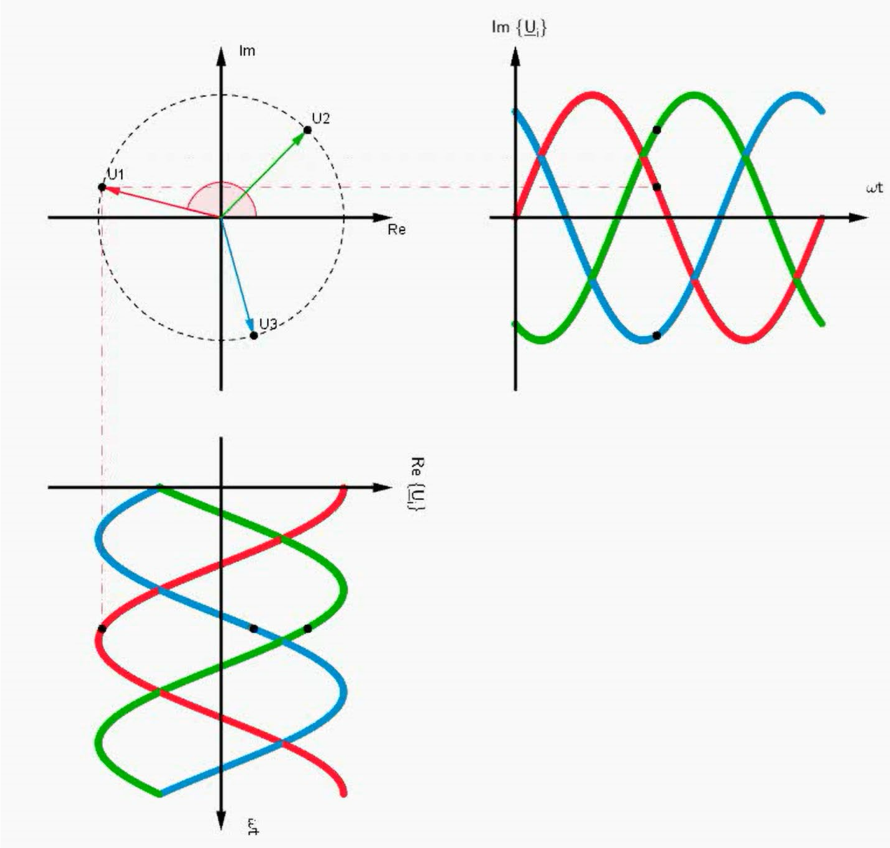


- Vidéo Fresnel triphasé 20 degrés



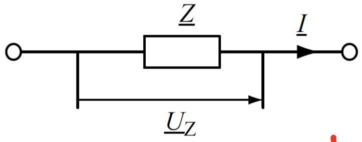
REPRÉSENTATION DE FRESNEL

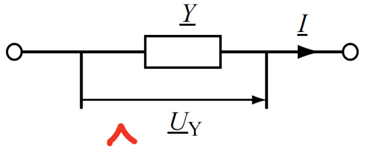
- Vidéo Fresnel triphasé 120 degrés



Impédances et Admittances

$\underline{u} = \underline{z}\,\underline{i}$





$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}}$$ Impédance

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$$ Admittance

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U e^{j\alpha}}{I e^{j\beta}} = \frac{U}{I} e^{j(\alpha - \beta)} = Z e^{j(\alpha - \beta)}$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{1}{Z} e^{-j\varphi} = Y e^{-j\varphi}$$

EPFL

$$u(t) = \hat{U} \sin(\omega t + \alpha) \qquad \xRightarrow{\mathbb{C}} \qquad \underline{u} = \underline{\hat{U}} e^{j(\omega t + \alpha)}$$

$$i(t) = \hat{I} \sin(\omega t + \beta) \qquad\qquad \underline{i} = \underline{\hat{I}} e^{j(\omega t + \beta)}$$

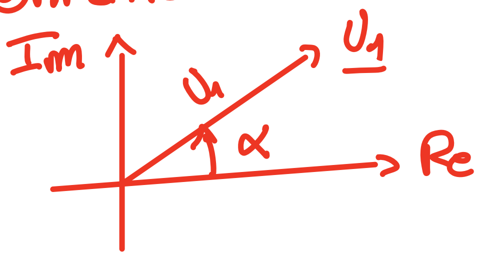
Pour simplifier les calculs, on peut utiliser les phaseurs $\underline{\hat{U}} = \hat{U} e^{j\alpha}$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\underline{\hat{U}}}{\underline{\hat{I}}}$$ Impédance

$$\underline{Z} = \frac{U}{I} e^{j\varphi} = Z e^{j\varphi}$$

avec $|\underline{Z}| = \frac{U}{I}$

Représentation de Fresnel:



Somme vectorielle.

Résumé :

l'idée :

$$u = \hat{U} \sin(\omega t) \longrightarrow \underline{u} = \hat{U} e^{j(\omega t)}$$

$$u = \operatorname{Im}\{\underline{u}\}$$

$$i = \hat{I} \sin(\omega t + \beta) \longrightarrow \underline{i} = \hat{I} e^{j(\omega t + \beta)}$$

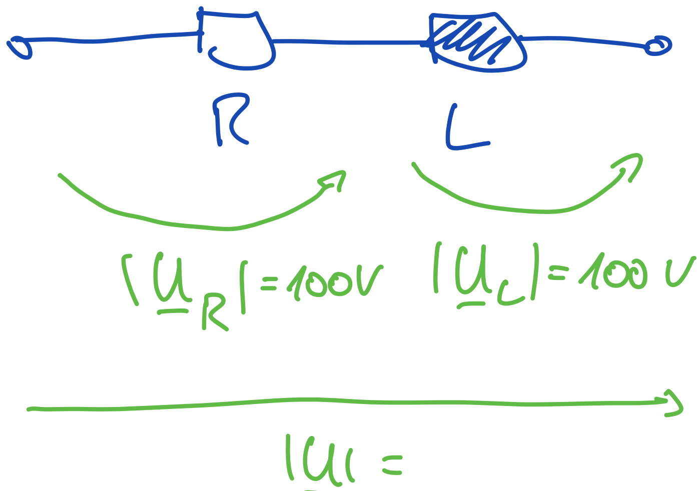
$$i = \operatorname{Im}\{\underline{i}\}$$

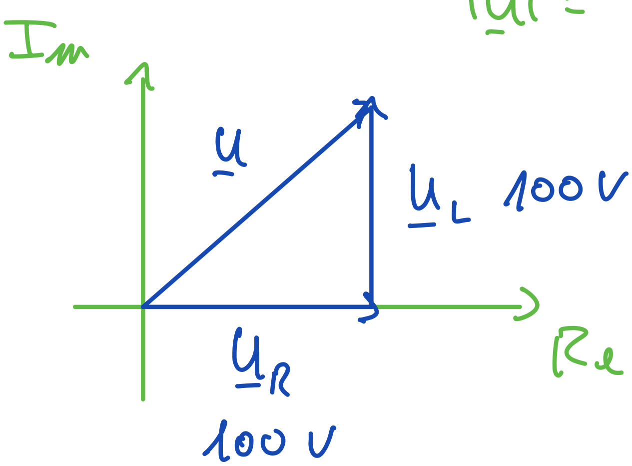
Avantage de la méthode :

$$\frac{d\underline{i}}{dt} = j\omega \hat{I} e^{j(\omega t + \beta)} = j\omega \underline{i}$$

$$\int \underline{i}\, dt = \frac{1}{j\omega} \hat{I} e^{j(\omega t + \beta)} = \frac{1}{j\omega} \underline{i}$$

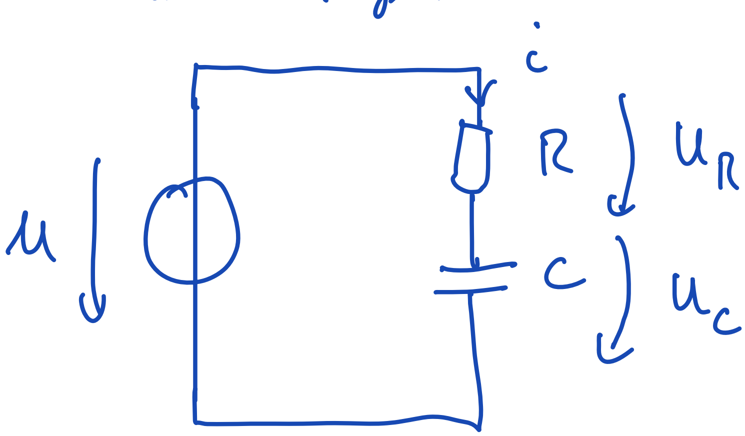
Rappel :





$$|\underline{U}| = \sqrt{100^2 + 100^2}$$

Autre Exemple :



$$u = \hat{U}\sin(\omega t + \alpha)$$

1) Redessiner le Schéma

2) Sens des tensions et courant

3) Kirchhoff

P

$$u = u_R + u_C$$

$$u_R = R \cdot i$$

$$u_C = \frac{1}{C} \int i \, dt$$

$$u = R \cdot i + \frac{1}{C} \int i \, dt$$

4) On passe en complexe :

$$u = \hat{U} \sin(\omega t + \alpha) \longrightarrow \underline{u} = \hat{U} e^{j(\omega t + \alpha)}$$

$$\underline{u} = R \cdot \underline{i} + \frac{1}{C} \int \underline{i} \, dt$$

5) Dériver - intégrer :

$$\int e^{j\omega t} \, dt \rightarrow \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t}$$

$$\underline{u} = R \cdot \underline{i} + \frac{1}{j\omega C} \underline{i}$$

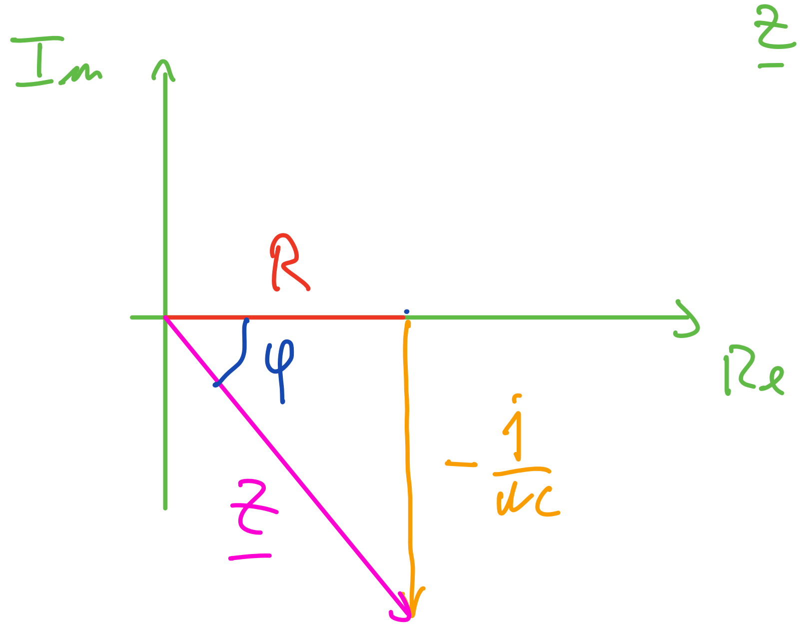
$$= \left(R + \frac{1}{j\omega C} \right) \underline{i}$$

Impedance

$$\hat{u}\, e^{j(\omega t+\alpha)} = \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right) \hat{I}\, e^{j(\omega t+\beta)}$$

$$\hat{u}\, \cancel{e^{j\omega t}} \cdot e^{j\alpha} = \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right) \hat{I}\, \cancel{e^{j\omega t}} \cdot e^{j\beta}$$

$$\hat{u}\, e^{j\alpha} = \underbrace{\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)}_{\underline{Z}} \hat{I}\, e^{j\beta}$$



$$\frac{1}{j\omega C} \cdot \frac{j}{j} = -\frac{j}{\omega C}$$

$$\varphi = \operatorname{Arctg}\left(\frac{-1}{R\omega C}\right)$$

$$\varphi = \alpha - \beta$$

$$|\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

6) Résoudre et identifier :

$$\hat{U} e^{j\alpha} = Z e^{j\varphi} \cdot \hat{I} e^{j\beta}$$

7) Solution complexe :

$$\underline{i} = \underline{\hat{I}} e^{j(\omega t + \beta)} = \frac{\hat{U}}{Z} e^{j(\omega t + \alpha - \varphi)}$$

8) Solution réelle :

$$i = \{ \mathrm{Im}\, \underline{i} \} = \frac{\hat{U}}{Z} \sin(\omega t + \alpha - \varphi)$$

Définition :

$$\underline{u} = \hat{U} e^{j(\omega t + \alpha)}$$

valeur instantanée complexe.

$$\underline{\hat{U}} = \hat{U} e^{j\alpha}$$

phaseur de crête

$$\underline{U} = U e^{j\alpha}$$

phaseur

6.4 THE DEFINITION

Loi d'Ohm :

$$\underline{u} = \underline{z} \cdot \underline{i}$$

$$\underline{U} = \underline{Z}\ \underline{I}$$

$$u = z \cdot i$$

6.4.3 Résistance et Réactance :

Impédance $\Rightarrow$ $\underline{z} = z\, e^{j\varphi}$

$$= z\,(\cos\varphi + j\sin\varphi)$$

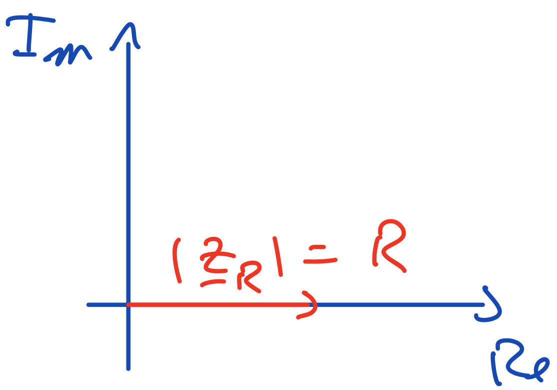
$$\underbrace{z \cdot \cos\varphi}_{R} + \underbrace{z\, j \sin\varphi}_{jX}$$

Résistance Réactance

Définition : $\dfrac{1}{\underline{z}} = \underline{y}$ admittance

6.4.4 Impédance de R

$$\underline{Z}_R = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{R \cdot \underline{I}}{\underline{I}} = R$$



$|\underline{Z}_R| = R$

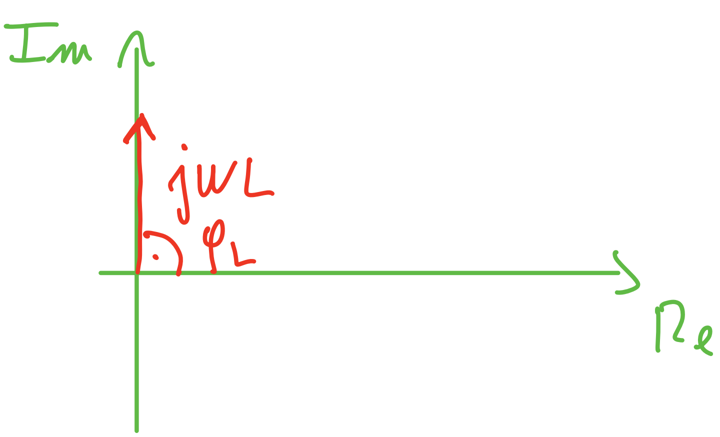
$\varphi_R = 0$

$X_R = 0$

6.4.5 Impédance de L

$$\underline{U} = j\omega L \, \underline{I} \qquad \left(u = L \frac{di}{dt} \right)$$

$$\underline{Z}_L = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{j\omega L \cdot \underline{I}}{\underline{I}} = j\omega L$$



$Z_L = \omega L$

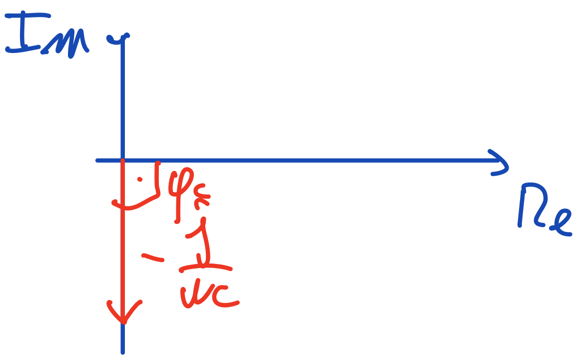
$\varphi_L = \frac{\pi}{2}$

$R_L = 0$

$X_L = \omega L$

6.4.6 Impédance de C :

$$\underline{Z}_c = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{\omega C}$$

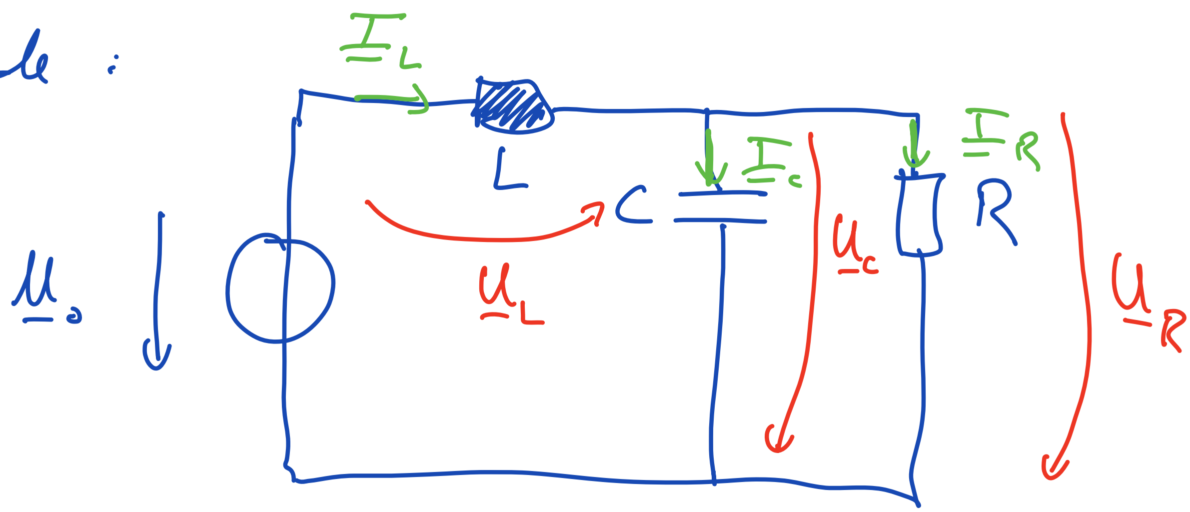


$$Z_c = \frac{1}{\omega C}$$

$$R_c = 0$$

$$\varphi_c = -\frac{\pi}{2}$$

Exemple :



$\underline{I}_c$: connu $\rightarrow$ $\underline{U}_0$?

$$\underline{U}_c = \underline{U}_R$$

$$\underline{U}_c = \underline{Z}_c \cdot \underline{I}_c = -j\frac{1}{\omega C} \cdot \underline{I}_c = \underline{U}_R$$

$$\underline{U}_R = R \cdot \underline{I}_R$$

$$\underline{I}_R = \frac{\underline{U}_c}{R} = -\frac{1}{\omega C R} \cdot \underline{I}_c$$

$$\underline{I}_L = \underline{I}_c + \underline{I}_R = \underline{I}_c \left(1 - j \frac{1}{\omega C R} \right)$$

$$\underline{U}_L = \underline{Z}_L \cdot \underline{I}_L = j\omega L \, \underline{I}_L$$

$$= \underline{I}_c \left(\frac{L}{RC} - j\omega L \right)$$

$$\underline{U}_o = \underline{U}_L + \underline{U}_c = \underline{I}_c \left(\frac{L}{RC} + j\omega L \right)$$

$$- j \frac{1}{\omega C} \cdot \underline{I}_c$$

$$\underline{U}_o = \underline{I}_c \left[\frac{L}{RC} - j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right]$$

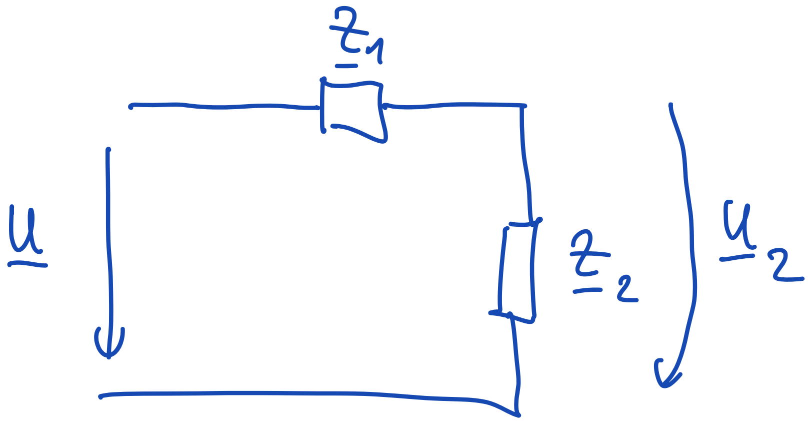
7.2.4 Tripôle équivalent :

Π – T ou $\curlywedge$ – Δ

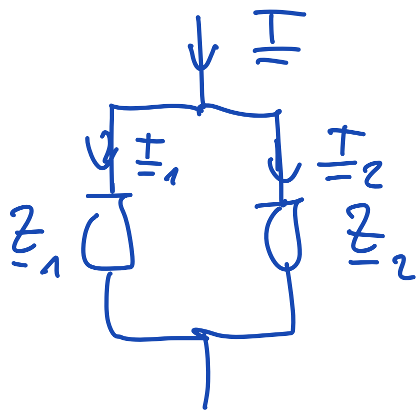
→ en complexe, identique mais vectorielle.

P. 138 Livre

7.2.5 Diviseur de tension et courant :

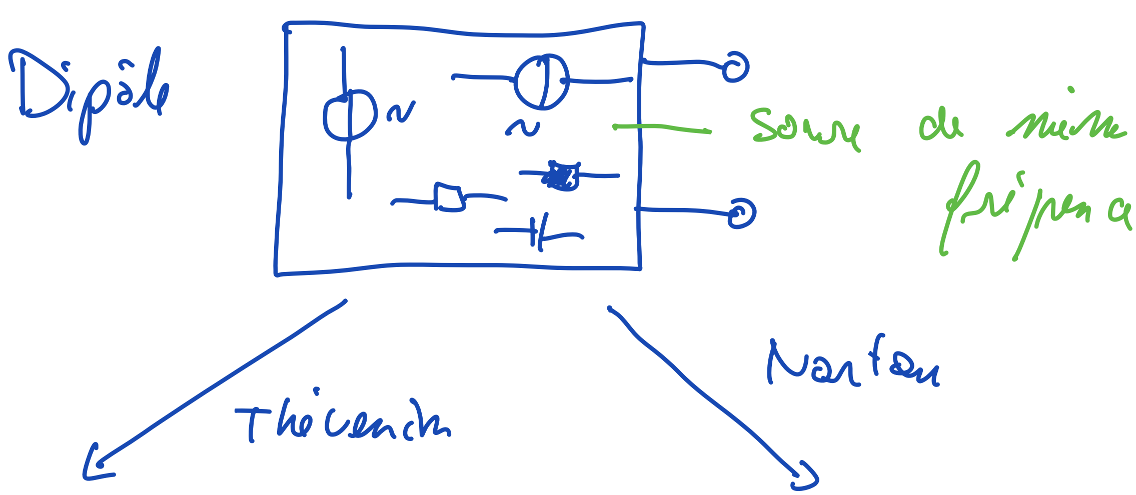


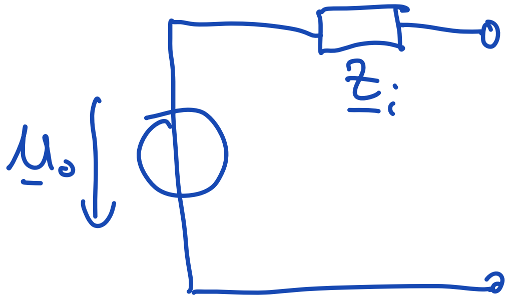
$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \cdot \underline{U}$$

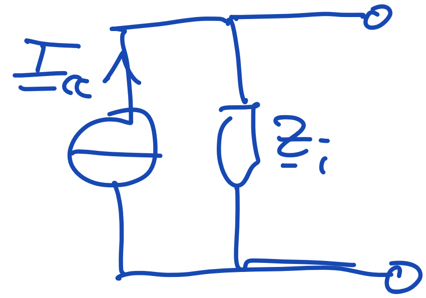


$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \cdot \underline{I}$$

7.3.1 Théorèmes de Thévenin et Norton :







$\underline{U}_o$: Tension à vide du dipôle

$\underline{I}_{cc}$: le courant de court-circuit du dipôle

$$\underline{Z}_i = \frac{\underline{U}_o}{\underline{I}_{cc}}$$

7.4 Principe de superposition :

Système linéaire uniquement

Cas no 1 : Toutes les sources ont même fréquence :

→ On considère chaque source séparément en annulant les autres sources :

Source No 1 → $\underline{I}_1$

" 2 → $\underline{I}_2$

$$\underline{I}_{tot} = \sum^{K} \underline{I}_i \qquad K = \text{nb source}$$

$j=1$

cas no 2 : les sources n'ont pas la même fréquence

On traite le problème par fréquence :

f_1 : $\longrightarrow \underline{I}_{tot\,1} \longrightarrow i_{tot_1}(t)$

$i_1 = \hat{I}_1 \sin(\omega_1 t + \beta_1)$

f_2 : $\longrightarrow \underline{I}_{tot\,2} \longrightarrow i_{tot_2}(t)$

$i_2 = \hat{I}_2 \sin(\omega_2 t + \beta_2)$

$$i_{final} = i_{tot_1}(t) + i_{tot_2}(t)$$
$$= \hat{I}_1 \sin(\omega_1 t + \beta_1) + \hat{I}_2 \sin(\omega_2 t + \beta_2)$$

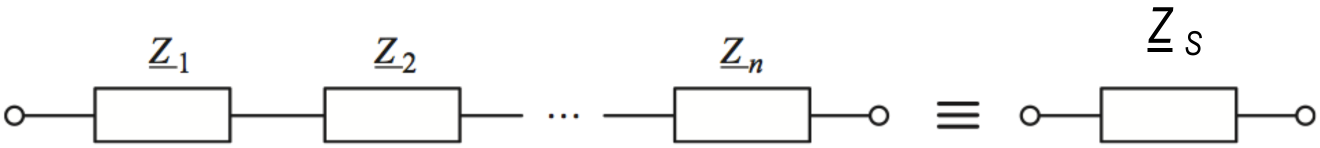
7.4 PRINCIPE DE SUPERPOSITION (~)
8. PUISSANCES EN ALTERNATIF SINUSOÏDAL MONOPHASÉ

Électrotechnique I

Yves PERRIARD & Yoan Civet
Laboratoire d’Actionneurs Intégrés

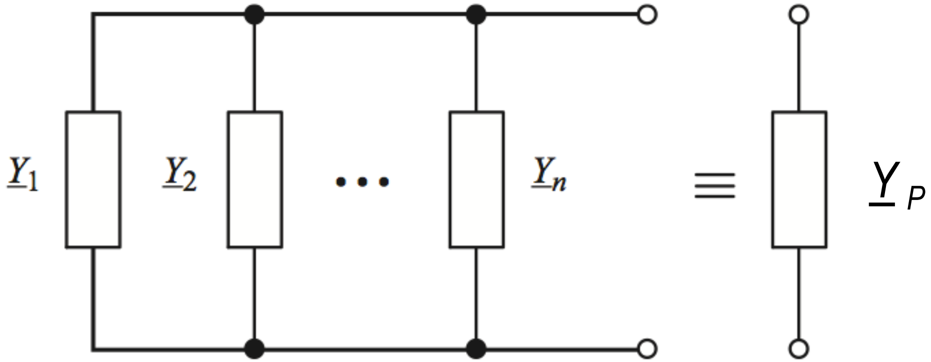
ASSOCIATIONS DES IMPÉDANCES

EPFL



$$\underline{Z}_S = \sum_k \underline{Z}_k$$

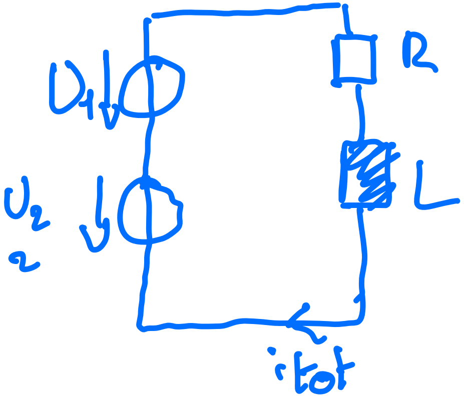
$$\underline{Y}_S = \frac{1}{\underline{Z}_S} = \frac{1}{\sum_k \underline{Z}_k} = \frac{1}{\sum_k \frac{1}{\underline{Y}_k}}$$



$$\underline{Y}_P = \sum_k \underline{Y}_k$$

$$\underline{Z}_P = \frac{1}{\underline{Y}_P} = \frac{1}{\sum_k \underline{Y}_k} = \frac{1}{\sum_k \frac{1}{\underline{Z}_k}}$$

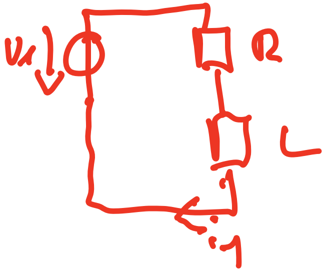
EXEMPLE SUPERPOSITION RÉGIME ALTERNATIF

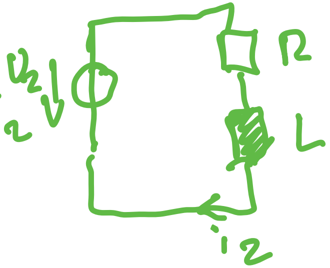


U_1 = constante

$u_2(t) = \sqrt{2}\, U_2 \sin(\omega t + \alpha)$

i_{tot} ?



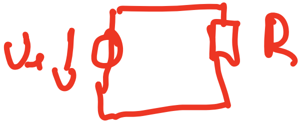


* U_1

$f = 0, \; \omega = 0$

$Z_R = R \quad Z_L = j\omega L = 0$

$i_1 = \dfrac{U_1}{R}$



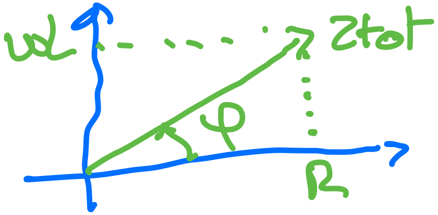
* U_2

$Z_R = R \quad Z_L = j\omega L \quad Z_{tot} = R + j\omega L$

$|Z_{tot}| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$

$U_2 = Z_{tot}\, I_2$

$\varphi = \arctan \dfrac{\omega L}{R}$



EXEMPLE SUPERPOSITION RÉGIME ALTERNATIF

$$\underline{U_2} = U_2 e^{j0} \quad (\alpha = 0)$$
$$= U_2$$

$$\underline{I_2} = \frac{U_2 e^{j0}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}\, e^{j\varphi}} = I_2 e^{-j\varphi} \qquad \text{avec } I_2 = \frac{U_2}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

$$\underline{i_2(t)} = \sqrt{2}\, I_2 e^{j(\omega t - \varphi)}$$

$$i_2 = \sqrt{2}\, I_2 \sin(\omega t - \varphi) \qquad \varphi = \text{Arctan}\, \frac{\omega L}{R}$$

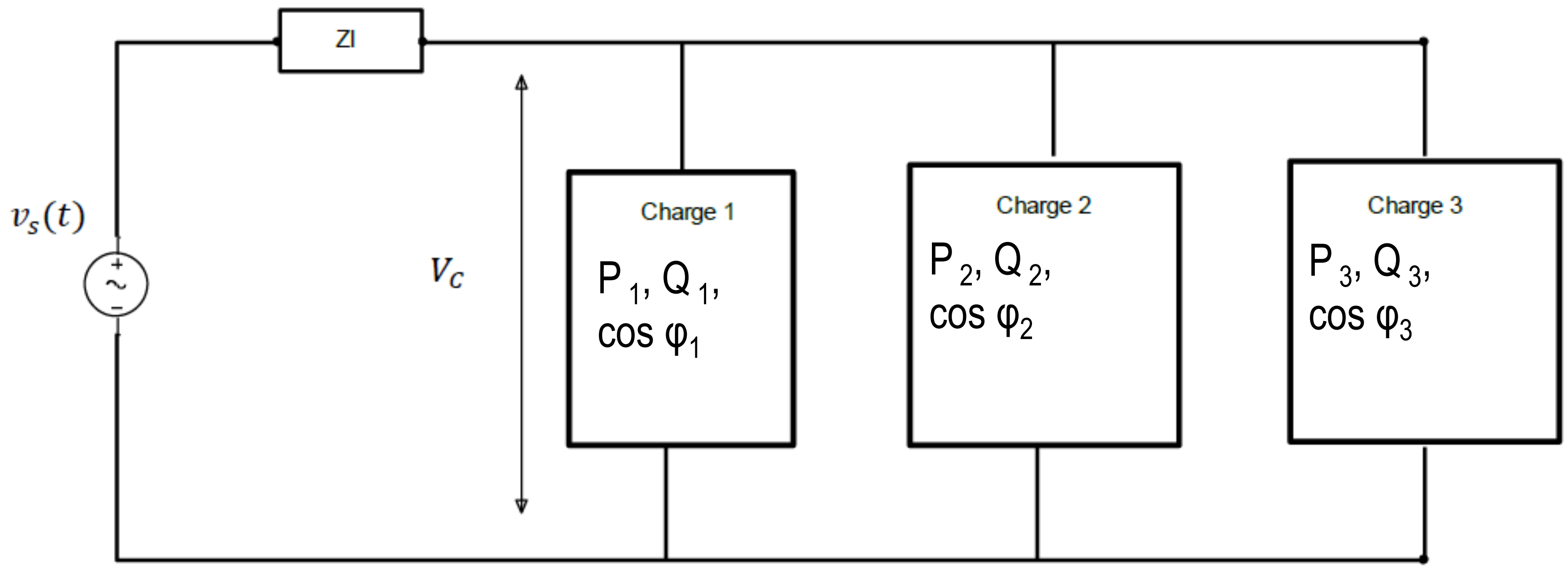
$$\Rightarrow i_{tot} = i_1 + i_2 = \frac{U_1}{R_1} + \sqrt{2}\, I_2 \sin(\omega t - \varphi)$$

8. PUISSANCES EN ALTERNATIF SINUSOÏDAL MONOPHASÉ

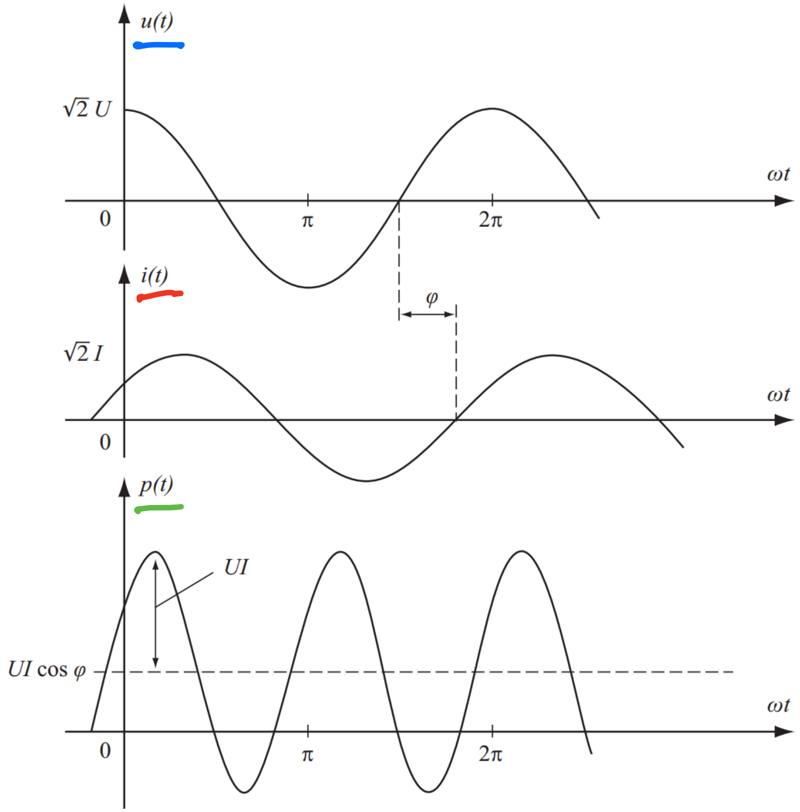
Électrotechnique I

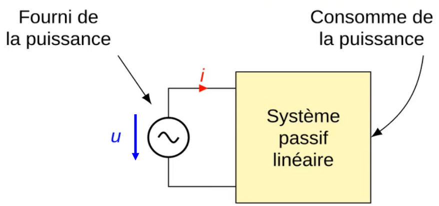
Yves PERRIARD & Yoan Civet
Laboratoire d'Actionneurs Intégrés

BILAN DE PUISSANCE



PUISSANCE INSTANTANÉE





$$u(t) = \hat{U}\cos(\omega t + \alpha)$$

$$i(t) = \hat{I}\cos(\omega t + \beta)$$

$$p(t) = p = u(t)\cdot i(t) = u \cdot i$$

$$= \hat{U}\hat{I}\cos(\omega t + \alpha)\cos(\omega t + \beta)$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) + \cos(x+y)\right)$$

$$p = \hat{U}\hat{I}\,\frac{1}{2}\left(\cos(\underbrace{\alpha - \beta}_{\varphi}) + \cos(2\omega t + \alpha + \beta)\right)$$

$$p = UI\cos\varphi + UI\cos(2\omega t + \alpha + \beta)$$

$$\hat{U} = \sqrt{2}\,U$$

$$\hat{I} = \sqrt{2}\,I$$

PUISSANCE INSTANTANÉE

$\beta = \alpha - \varphi$

$\cos(2\omega t + 2\alpha - \varphi) = \cos\varphi \cos(2\omega t + 2\alpha) + \sin\varphi \sin(2\omega t + 2\alpha)$

$$p(t) = \underbrace{UI\cos\varphi\left[1 + \cos(2\omega t + 2\alpha)\right]} + \underbrace{UI\sin\varphi\sin(2\omega t + 2\alpha)}$$

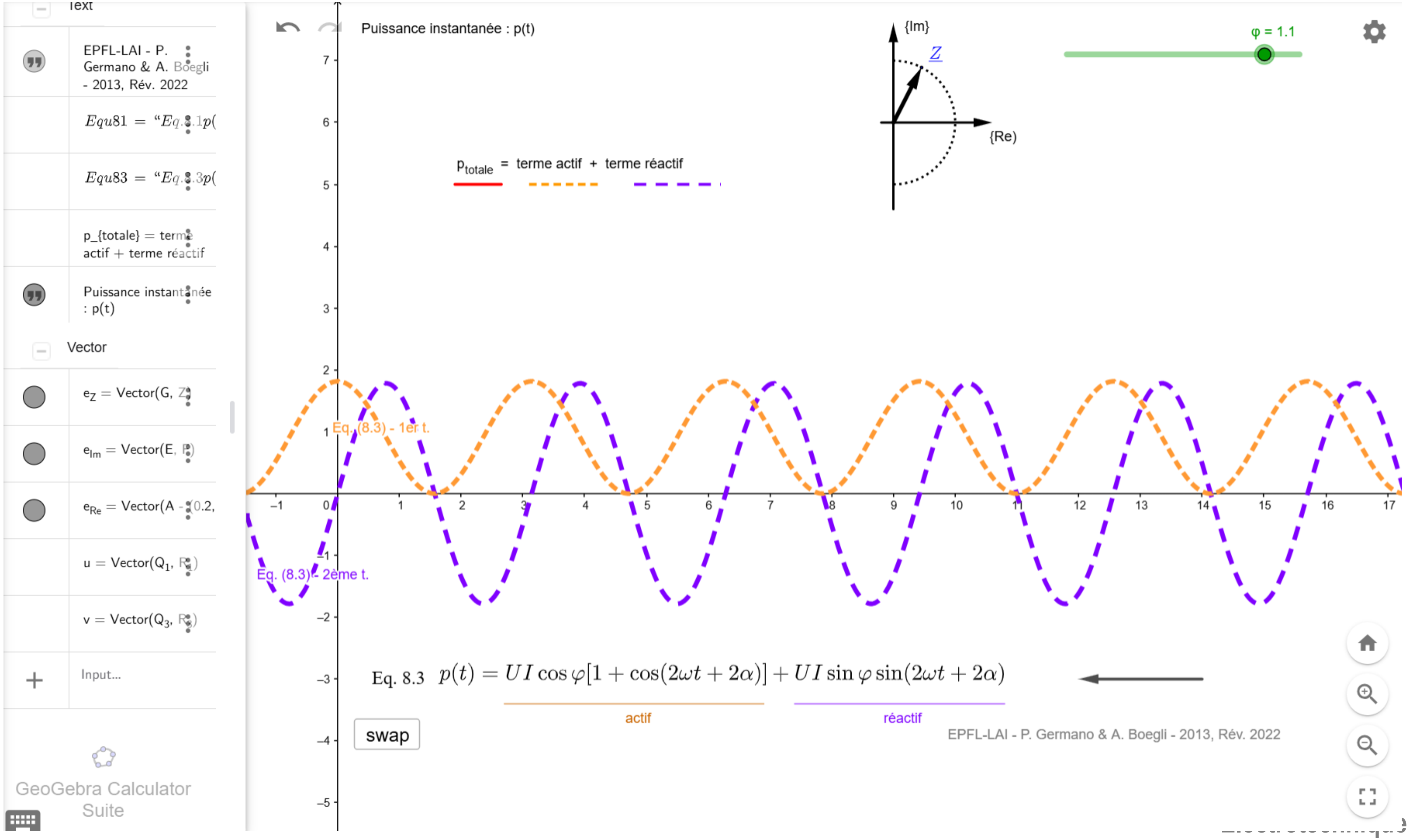
- oscille autour de $UI\cos\varphi$
- toujours positif
- échange unidirectionnel

- oscille autour de 0
- Amplitude moyenne nulle.
- Échange réversible.

si $\varphi = 0$ 1er terme max. et second $= 0$

si $\varphi = \pm\pi/2$ 1er terme $= 0$ et second max.

PUISSANCE INSTANTANÉE

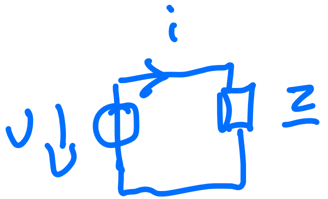


EPFL

$$P = \bar{p}(t) = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt$$

$$= UI\cos\varphi \quad [W]$$

P = valeur moyenne de p(t)
= ce qu'on transforme et paye
= Energie réelle convertible.



a) $\underline{Z} = R \qquad \varphi_R = 0$

$$P_R = UI\cos\varphi = UI = \frac{\hat{U}\hat{I}}{2} = RI^2$$

b) $\underline{Z} = \underline{Z_L} = j\omega L \qquad \varphi_L = \pi/2$

$$P_L = UI\cos\varphi = 0$$

c) $\underline{Z} = \underline{Z_C} = \frac{-j}{\omega C} \qquad \varphi_C = -\pi/2$

$$P_C = UI\cos\varphi = 0$$

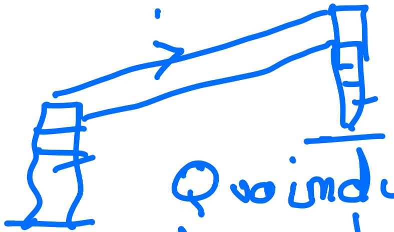
EPFL

Par définit° : Amplitude de la composante alternative de $p(t)$

$Q = UI \sin \varphi$ [Var] volt-ampère réactif

$Q > 0$ Réactif positif -> inductif

$Q < 0$ Réactif négatif -> capacitif



Q va induire des pertes par effet Joule

Puissance fictive : caractérise l'échange de puissance non convertible.

PUISSANCE APPARENTE

$S = U \cdot I$ [VA] Volt ampère

≈ volume de l'objet

≈ Prix de l'objet

objet → source

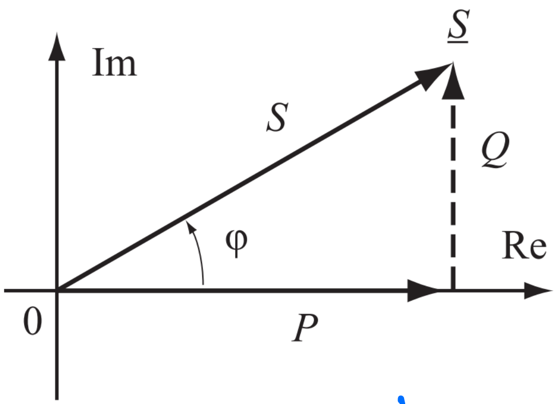
→ transformateur

$$\left.\begin{aligned} P &= S\cos\varphi \\ Q &= S\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

⚠ $S_{tot} \neq \sum_k S_k$

PUISSANCE APPARENTE COMPLEXE

$$\underline{S} = P + jQ = Se^{j\varphi}$$



$\underline{S}$ est purement conceptuel

$$\underline{S}_{tot} = \sum_k \underline{S}_k$$

$$P_{tot} = \sum_k P_k$$

$$Q_{tot} = \sum_k Q_k$$

PUISSANCE APPARENTE COMPLEXE

$$\underline{S} = S e^{j\varphi} = UI e^{j\varphi} = UI e^{j(\alpha-\beta)} = U e^{j\alpha} \cdot I e^{-j\beta}$$
$$= \underline{U}\,\underline{I}^*$$

$$\left.\begin{array}{l} \underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I} \\ \underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^* \end{array}\right\} \quad \underline{S} = \underline{Z}\,\underline{I}\,\underline{I}^* = \underline{Z}\, I^2 = (R + jX) I^2$$
$$= RI^2 + jXI^2$$
$$= P + jQ$$

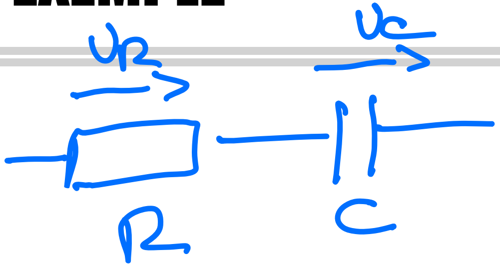
$$P = RI^2 = UI\cos\varphi$$
$$Q = XI^2 = UI\sin\varphi$$

SYNTHÈSE

EPFL

Type de puissance :	Puissance active P [W]	Puissance réactive Q [var]	Puissance apparente S [VA]
R (résistance) $Z = R$; $\varphi = 0$	$P_R = U_R I_R = R I_R^2 = \frac{U_R^2}{R}$	$Q_R = 0$	$S_R = UI = P_R$
L (inductance) $Z = jL\omega$ $\varphi = \pi/2$	$P_L = 0$	$Q_L = U_L I_L = X I_L^2 = \omega L I_L^2$	$S_L = U_L I_L = Q_L$
C (capacité) $Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{\omega C}$ $\varphi = -\pi/2$	$P_C = 0$	$Q_C = -U_C I_C = \frac{-1}{\omega C} I_C^2$	$S_C = -U_C I_C = Q_C$

EXEMPLE

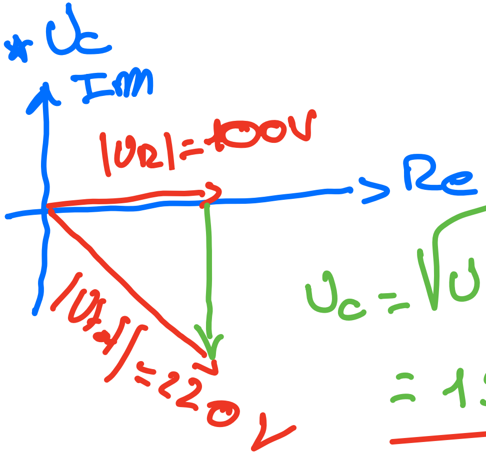


$|U_{tot}| = 220\,V$

$f = 50\,Hz \quad U_R = 100\,V \quad P_{tot} = 500\,W$

$U_c\,;\; S\,;\; \cos\varphi\;?$

* U_c



$$U_c = \sqrt{U_{tot}^2 - U_R^2} = 195{,}95\,V$$

* S

$$P = P_R = P_{tot} = 500\,W = RI^2 = \frac{U_R^2}{R}$$

$$\Rightarrow R = 20\,\Omega \text{ et } I = 5\,A$$

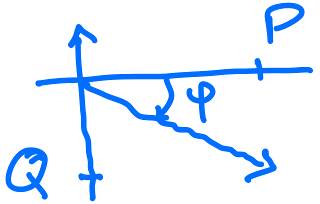
$$S = UI = 220 \cdot 5 = 1100\,VA$$

$$\underline{S} = P + jQ$$

$$Q = U_c I_c \sin\varphi = -U_c I = -195{,}95 \times 5 = -979{,}8\,\text{var}$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 1100\,VA.$$

*



$$\varphi = \arctan\frac{Q}{P} = -62{,}9^\circ$$

$$\cos\varphi = 0{,}45$$

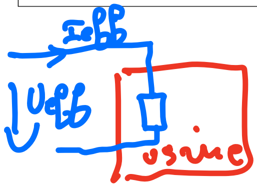
EPFL

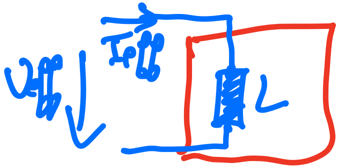
Distribution d'énergie

Tableau 1. Facteurs de puissances des appareils les plus courants

Appareils	Facteur de puissance	Observations
	Moteurs asynchrones en charge	
0 % de charge	0.17	Il faut éviter d'utiliser les moteurs asynchrones à vide
25 % de charge	0.55	
50 % de charge	0.73	
75 % de charge	0.8	
100 % de charge	0.85	
	Lampes	
Lampes à incandescence	1	Ces lampes sont généralement compensées dès l'origine
Lampes à fluorescence	0.5	
Lampes à décharge	0.4 à 0.6	
Fours		
Fours à résistance	1	
Fours à induction	0.85	
Fours à arc	0.8	

Yoan René Cyrille Civet (yoan.civet@epfl.ch) est connecté





Le **facteur de puissance cos(φ)** rend compte de l'efficacité d'un dipole pour consommer correctement la puissance

$$\cos\varphi = \frac{P}{UI}$$

Système 1 : $\cos\varphi_1 = 1$

$P_1 = U_{eff} I_{eff_1} = S_1$

Système 2 $\cos\varphi_2 = 0{,}85$

$P_2 = U_{eff} I_{eff_1} \cos\varphi_2$

On veut $P_1 = P_2$ pour avoir la même puissance active pour une même tension U_{eff}:

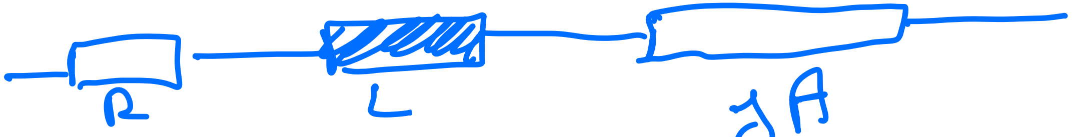
$\Rightarrow I_{eff_2} > I_{eff_1}$

$P_{active} \approx 28$ ct/kWh

$Q \approx 6$ ct/kvarh

PUISSANCE MAXIMALE ET ADAPTATION

Exemple : circuit RL série



$$Z_{eq} = R + j(\omega L + A)$$

On veut annuler la réactance de Z_{eq}

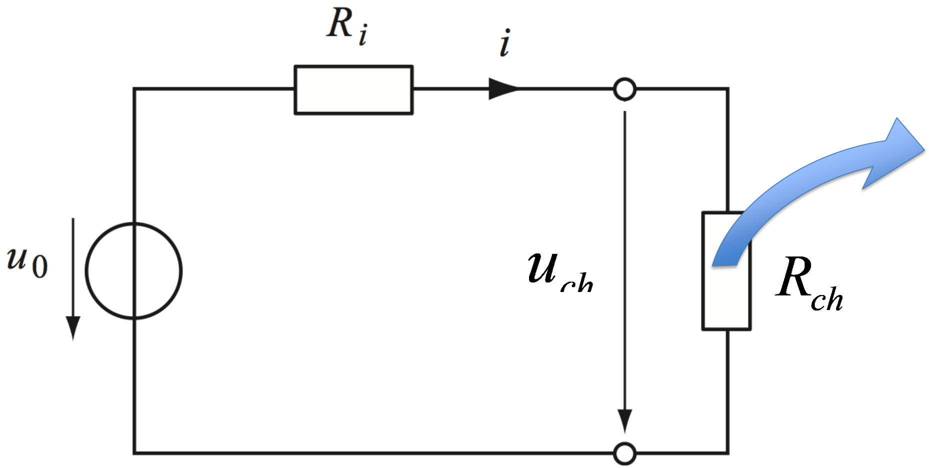
$A < 0 \Rightarrow A$ est une capacité

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{L\omega^2}$$

et $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ est la condition de résonance.

Rappel régime continu



$$P_{ch} = \frac{u_0^2 \cdot R_{ch}}{\left(R_{ch} + R_i\right)^2} \qquad Max \rightarrow \frac{\mathrm{d}P_{ch}}{\mathrm{d}R_{ch}} = 0$$

Condition : $R_{ch} = R_i$

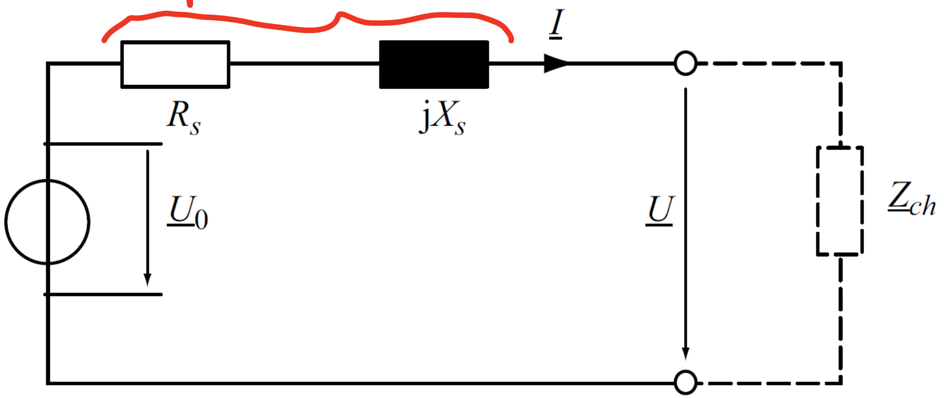
La condition d'adaptation de puissance est donc réalisée lorsque la valeur de la résistance de charge et celle de la résistance interne de la source sont égales

SOURCE AVEC IMPÉDANCE INTERNE

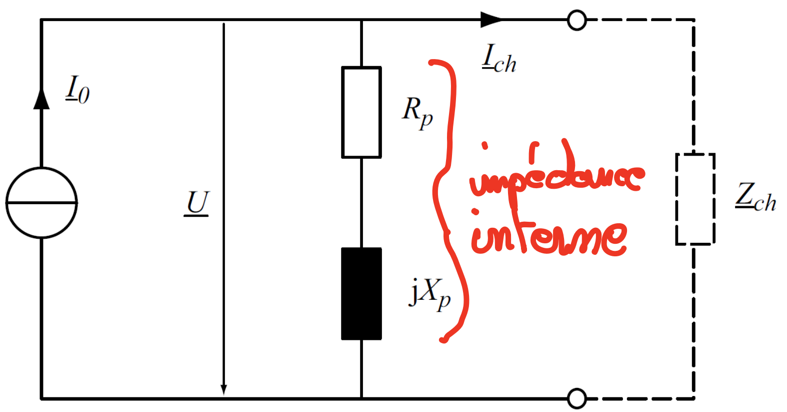
Pour un régime sinusoïdale monophasé

Source de tension

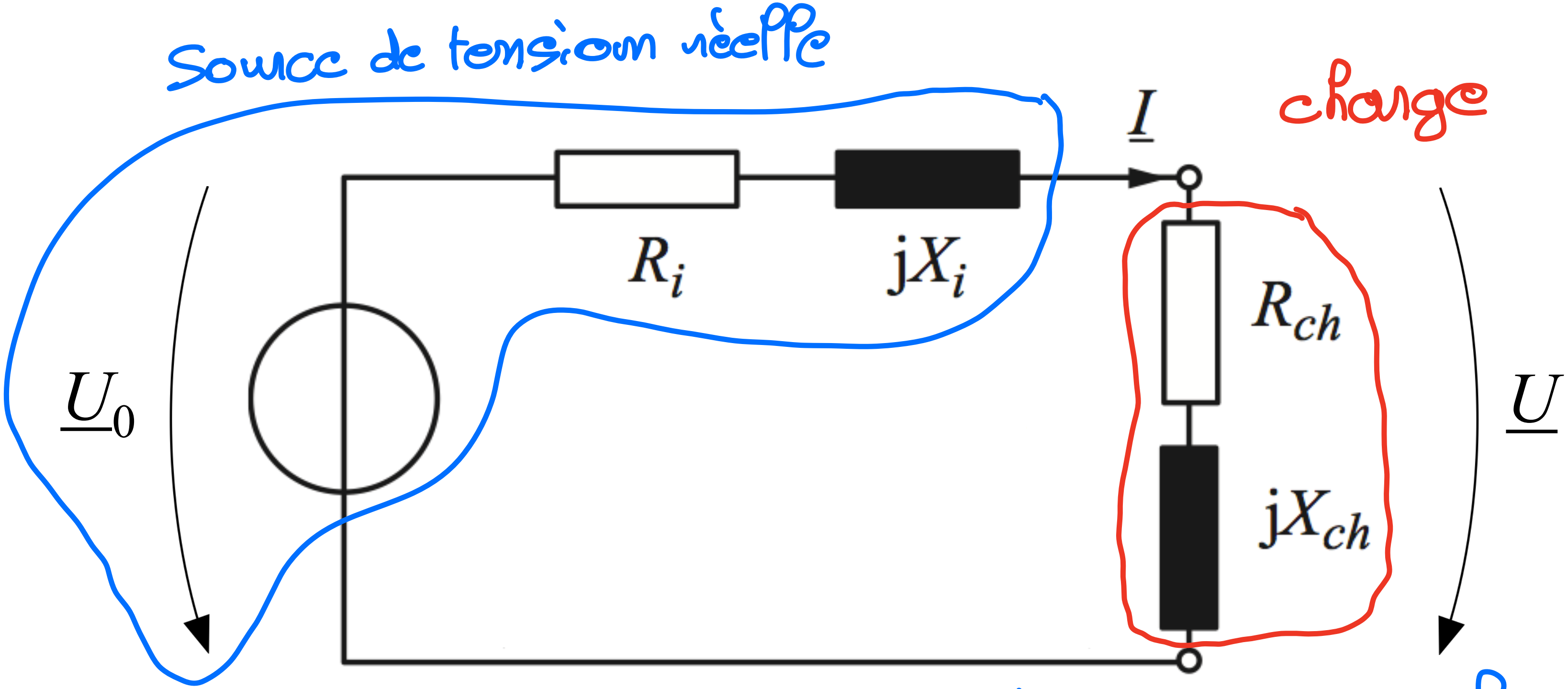
impédance interne.



Source de courant



Puissance maximale et adaptation - AC



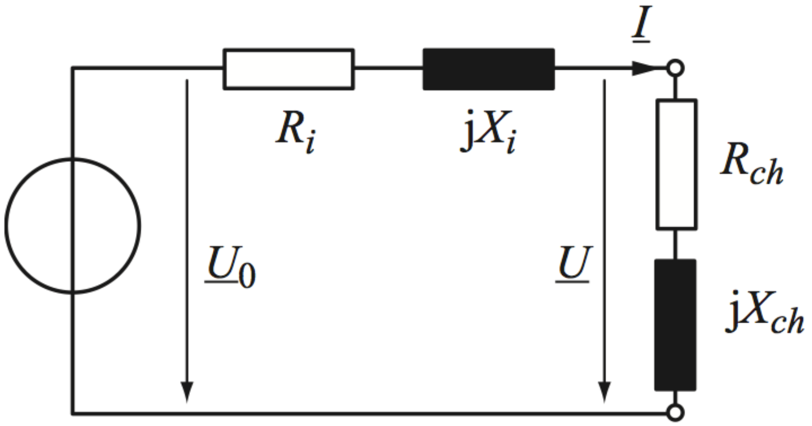
On souhaite transmettre le maximum de puissance à la charge.

EPFL

Puissance maximale et adaptation - AC

$\underline{U_0} = \underline{Z_i}\,\underline{I} + \underline{Z_{ch}}\,\underline{I}$

$\Rightarrow \underline{I} = \frac{U_0}{Z_i + Z_{ch}}$



$$P_{ch} = R_{ch} \cdot I^2 = \frac{U_0^2 R_{ch}}{(R_i + R_{ch})^2 + (X_i + X_{ch})^2}$$

$$\frac{\partial P_{ch}}{\partial X_{ch}} = 0 \quad \rightarrow \quad \ldots \quad \rightarrow \quad X_i = -X_{ch}$$

Condition : $\underline{Z}_{ch} = R_{ch} + jX_{ch} = R_i - jX_i = \underline{Z}_i^*$

En régime alternatif, la condition d'adaptation de puissance est réalisée lorsque la valeur de l'impédance de charge et celle de l'impédance interne de la source sont conjugués complexes

RÉSUMÉ

seule puissance qui fournit un travail.

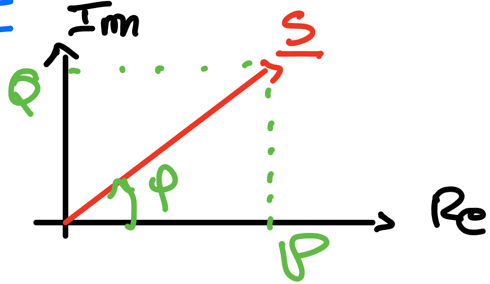
Puissance active : $P = UI\cos\varphi$ [W]

Puissance réactive : $Q = UI\sin\varphi = S\sin\varphi$ [var]

Puissance apparente : $S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}$ [VA]

Puissance apparente complexe : $\underline{S} = P + jQ = RI^2 + jXI^2$

Facteur de puissance : $\cos\varphi = \dfrac{P}{UI}$ $\qquad \varphi = \mathrm{Arctan}\,\dfrac{Q}{P}$



$P_{tot} = \sum_k P_k$

$Q_{tot} = \sum_k Q_k$

$\underline{S}_{tot} = \sum_k \underline{S}_k$

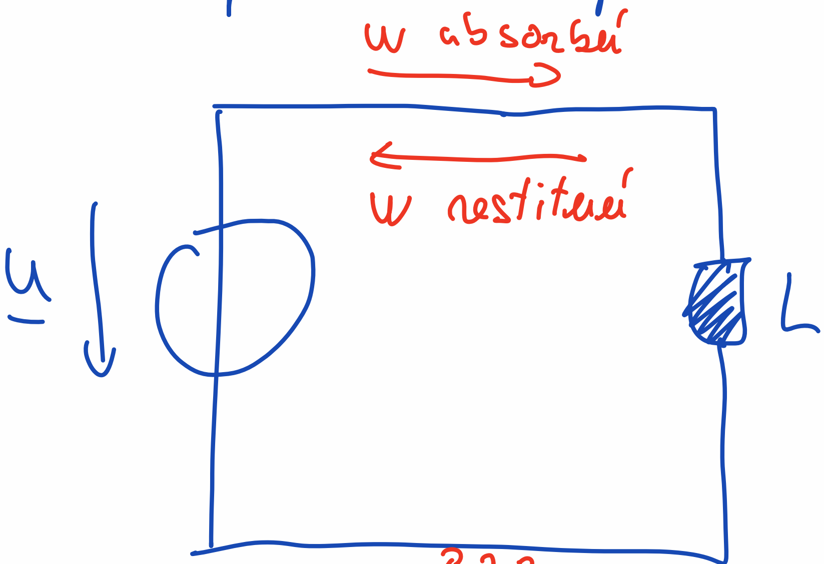
$\cos\varphi_{tot} = \dfrac{P_{tot}}{S_{tot}}$

$S_{tot} \neq \sum S_k$ mais $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$

* Condition d'adaptation impédance : $\underline{Z}_{ch} = \underline{Z}_i^*$

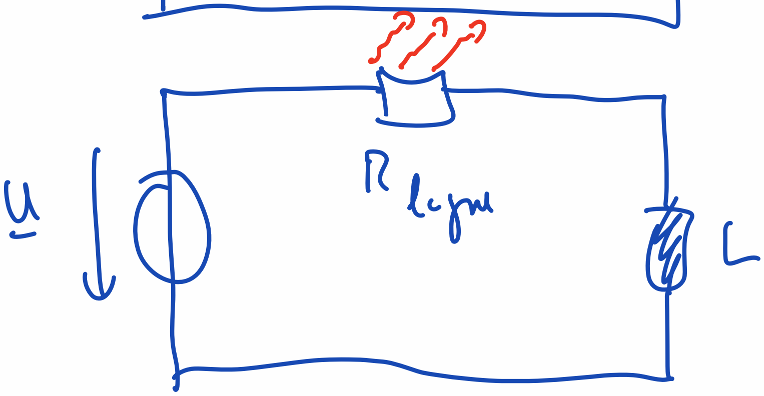
Complément :

adaptation de puissance :



$P = 0$

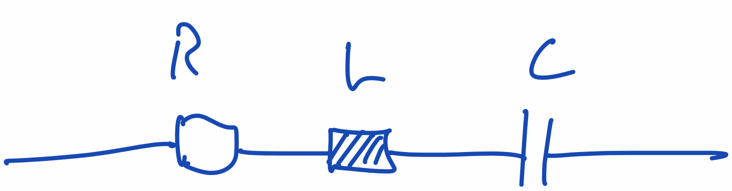
$Q = UI$



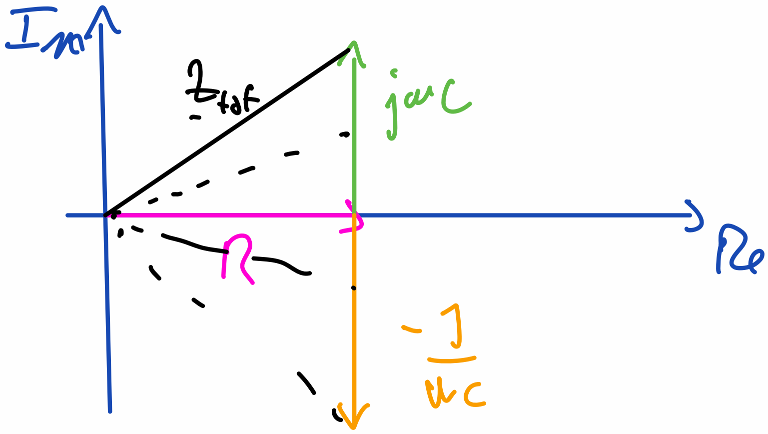
$P_{active} \approx 25 \text{ ct/kWh}$

$Q_r \approx 6 \text{ ct/kvarh}$

9. Comportement fréquentiel :

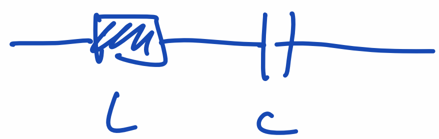


$$\underline{Z}_{tot} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$



9.2 Conditions de résonance

En série :

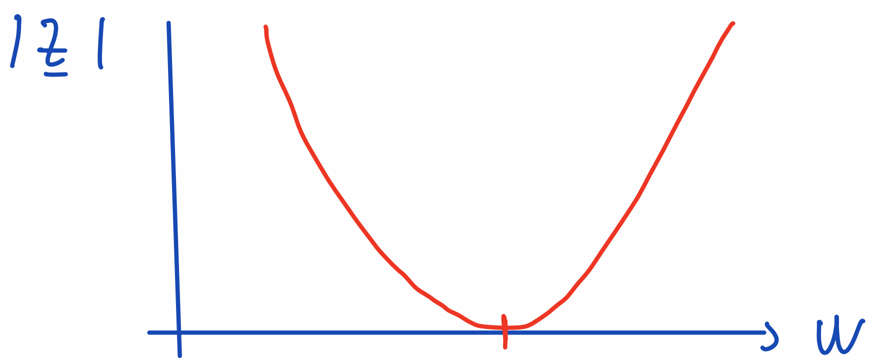


$$\underline{Z}_{eq} = j\omega L - j\frac{1}{\omega C} = j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$= j\left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C}\right)$$

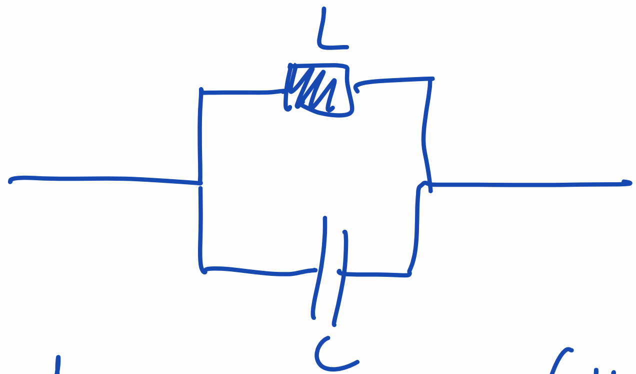
Si $\underline{Z}_{eq} = 0 \rightarrow$ condition de résonance

Si $\omega^2 LC - 1 = 0 \longrightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$



ω_0

En // :

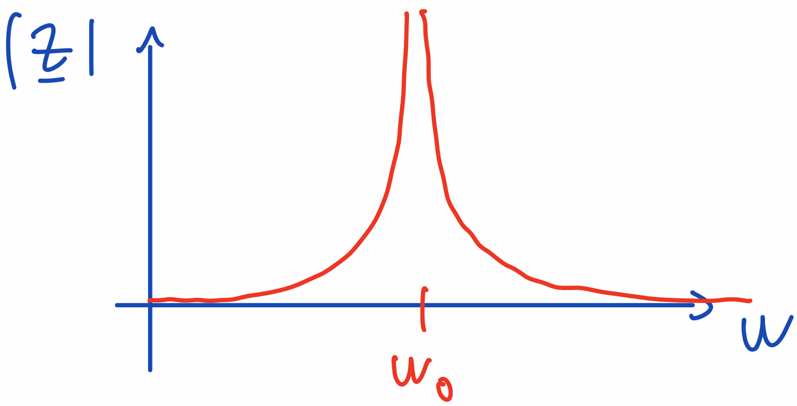


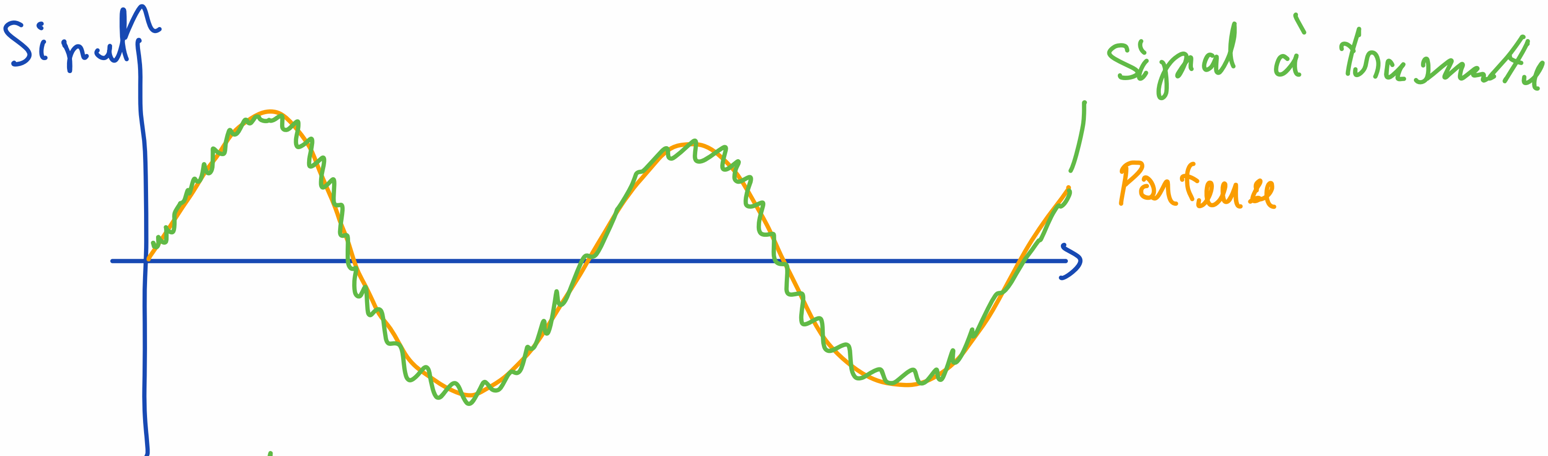
$$\underline{Z}_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{j\omega L} + j\omega C} = j\left(\frac{\omega L}{1-\omega^2 LC}\right)$$

Si on a la condition de résonance $1-\omega^2 LC = 0$

$\longrightarrow \quad \underline{Z}_{eq} \longrightarrow \infty$

Filtre : circuit bouchon





bouchon ω_0 : f de la porteuse